UNIVERSITE PARIS-SUD

Centre D'Orsay

THESE

DE DOCTORAT D'ÉTAT ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR ÈS SCIENCES

par

DENIS SERRE

1er sujet : INVARIANTS DES ÉQUATIONS DE LA MÉCANIQUE.
CALCUL DES VARIATIONS : FORMES QUADRATIQUES POSITIVES SUR UN CÔNE.
REMARQUES SUR LES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES DANS LE CAS STATIONNAIRE.

2e sujet : GÉODÉSIQUES FERMÉES DE SURFACES À COURBURE NÉGATIVE.

Soutenue le 10 JUIN 1982 *devant le Jury composé de :*

M. H. CARTAN *Président.*
MMES M. SCHATZMAN
M.F. VIGNERAS
MM. C. BARDOS
C. FOIAS
L. TARTAR
R. TEMAM

Codes matière : 76 C 05
35 Q 20
35 L 65
49 A 21
76 D 05

UNIVERSITE PARIS-SUD

Centre D'Orsay

THESE

DE DOCTORAT D'ÉTAT ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR ÈS SCIENCES

par

DENIS SERRE

1er sujet : INVARIANTS DES ÉQUATIONS DE LA MÉCANIQUE.
CALCUL DES VARIATIONS : FORMES QUADRATIQUES POSITIVES SUR UN CÔNE.
REMARQUES SUR LES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES DANS LE CAS STATIONNAIRE.

2e sujet : GÉODÉSIQUES FERMÉES DE SURFACES À COURBURE NÉGATIVE.

Soutenue le 10 JUIN 1982 *devant le Jury composé de :*

M. H. CARTAN *Président.*
MMES M. SCHATZMAN
M.F. VIGNERAS
MM. C. BARDOS
C. FOIAS
L. TARTAR
R. TEMAM

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Je suis tout particulièrement reconnaissant à Monsieur R. TEMAM de m'avoir accueilli dans son équipe et de m'avoir initié à la recherche. Grâce à lui, j'ai apprécié la beauté des équations de la mécanique.

Je tiens à remercier Monsieur H. CARTAN qui me fait l'honneur de présider le Jury, et dont les conseils m'ont été très utiles.

Mes remerciements vont aussi à Madame M. SCHATZMAN et Messieurs C. BARDOS, C. FOIAS et L. TARTAR qui ont accepté de faire partie du Jury.

Madame M.F. VIGNERAS m'a proposé un sujet dans lequel j'ai pu exprimer ma passion pour les nombres et la géométrie, je l'en remercie vivement.

Toute ma gratitude va à mes collègues du Laboratoire d'Analyse Numérique d'Orsay, ainsi qu'à Mesdames CANGEMI, LE MEUR et MAYNARD qui ont assuré avec compétence et gentillesse la frappe des diverses parties de cette thèse.

Cette thèse se compose de trois parties, qui sont indépendantes l'une de l'autre, bien que les équations de la mécanique des fluides soient sous-jacentes à chacune d'elles.

A. INVARIANTS DES EQUATIONS DE LA MECANIQUE.

Cette partie concerne la recherche systématique des invariants des équations d'évolution $u_t = \mathcal{A}(u)$, $(u : \Omega \times (0,T) \mapsto \mathbb{R}^m)$. Les invariants cherchés s'écrivent $X(u) = \int_\Omega \mathcal{B}(u)dx$, où $\mathcal{B}$ est un opérateur différentiel, généralement non linéaire. La méthode est basée sur la séquence d'égalités $0 = \frac{d}{dt} X(u(t)) = \int_\Omega \mathcal{B}'(u).u_t dx = \int_\Omega \mathcal{B}'(u).\mathcal{A}(u)dx$.

Lorsque l'équation comporte une force f ($u_t = \mathcal{A}(u)+f$), on demande que la variation de l'énergie $X(u(t))$ soit égale au travail de la force : $\frac{d}{dt} X(u(t)) = X'(u).f$, ce qui conduit à nouveau à l'égalité ci-dessus.

En général, un résultat d'existence locale de solutions régulières pour le problème de Cauchy $u_t = \mathcal{A}(u)(+ f)$ sur $(0, \varepsilon)$, $u(x,o) = v(x)$ permet de prouver que pour tout invariant X et tout élément v d'un espace H de fonctions régulières, on a :

$$\int_\Omega \mathcal{B}'(v).\mathcal{A}(v)dx = 0 \qquad (*).$$

On a ainsi éliminé la variable t. La condition (*) exprime que l'application $v \longmapsto \mathcal{B}'(v).\mathcal{A}(v)$ est un Lagrangien nul sur H. Lorsque cet espace contient $(\mathcal{D}(\Omega))^m$, et que $\mathcal{A}$ est un opérateur différentiel, les Lagrangiens nuls sont bien connus et l'égalité (*) mène à des calculs qui sont longs mais efficaces. Au cours de ceux-ci, l'une des principales difficultés est la séparation des invariants "non triviaux" d'avec les Lagrangiens nuls. En effet, ceux-ci fournissent des invariants qui ne prennent que la valeur zéro et sont sans intérêt.

Les calculs présentés ici concernent trois problèmes :

A.1) L'équation d'Euler des fluides parfaits incompressibles : Elle s'écrit

$$\begin{cases} u_t + (u.\nabla)u + \nabla p = f & \text{dans } \Omega, \text{ ouvert de } \mathbb{R}^3, \\ \text{div } u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u.n = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Ici on a $H = \{u \in (\mathcal{D}(\Omega))^3 \ ; \ \text{div } u = 0\}$, qui ne contient pas $(\mathcal{D}(\Omega))^3$. Nous avons donc établi la liste des Lagrangiens nuls sur H, du premier ordre, soit $L[u] = \mathcal{L}(u(x), \text{grad } (u(x)))$ (Proposition 3.1).

Une deuxième difficulté provient du fait que l'opérateur $\mathcal{A}$ est non local. En effet, $\mathcal{A}(u) = -\mathbb{P}((u.\nabla)u)$, où $\mathbb{P}$ est la projection orthogonale de $(L^2(\Omega))^3$ sur l'adhérence de H. Cette remarque permet de prouver que

$$\text{div } \mathcal{B}'(u) = 0 \quad \text{pour tout } u \in H \qquad (1).$$

Une autre conséquence de l'égalité (*) est

$$\int_\Omega u_{i,j}(x) u_{j,k}(x) \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial u_{i,k}} (u(X), \text{grad } u(x)) dx = 0 \quad \forall\, u \in H \qquad (2)$$

La résolution de (1) et (2) nous permet d'établir la liste des invariants du premier ordre ($\mathcal{B}[u] = B(u(x), \text{grad } u(x))$). L'égalité (2) est traitée en utilisant la Proposition 3.1.

A.2) L'équation de Korteweg-de-Vries.
Elle s'écrit $u_t + u_{xxx} + uu_x = 0$ sur $\mathbb{R} \times (0,T)$. Ici l'opérateur $\mathcal{A}$ est local, il n'y a qu'une variable d'espace, une seule fonction inconnue. De plus, on peut choisir $H = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (la classe de Schwartz), dans laquelle le problème de Cauchy admet une solution globale en temps.

Nous avons profité de ces facilités pour établir la liste des invariants d'ordre quelconque. MM. Gardner, Kruskal et Miura ont prouvé l'existence pour tout $n \geq 0$ d'un invariant $X_n(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} T_n(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n})dx$ d'ordre n. Nous prouvons que tout invariant d'ordre n, $X(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} T(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n})dx$ est combinaison linéaire des X_k, $k \leq n$ et de $X_{-1} = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)dx$.

A.3). Les systèmes hyperboliques semi-linéaires du 1er ordre. Ces systèmes s'écrivent $u_t + A(u)u_x = 0$ sur $\mathbb{R} \times (0,T)$. Le champ $u(x,t)$ possède N composantes, et $A(u)$ est une matrice NxN dont les coefficients réels dépendent de $u(x,t)$, et dont les valeurs propres $\lambda_k(u)$, $1 \leq k \leq N$, sont réelles et distinctes (hyperbolicité). Les vecteurs propres de $A(u)$ sont notés $r^k(u)$ et ceux de ${}^tA(u)$ sont notés $\ell^k(u)$. Le système est dit vraiment linéaire lorsque $\frac{\partial \lambda_k}{\partial u}.r^k(u)$ ne s'annule jamais, et linéairement dégénéré si $\frac{\partial \lambda_k}{\partial u}.r^k(u) = 0 \quad \forall\ 1 \leq k \leq N, \quad \forall\ u \in \mathbb{R}^N$.

Si $u(x,0) = v(x) \in H = (\mathcal{D}(\mathbb{R}))^N$, il existe une solution classique sur $(0,\varepsilon(v))$. C'est pour ces solutions que nous étudions les invariants du premier ordre $X(u(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} B(u(x,t), u_x(x,t))dx$. Lorsque le système est vraiment non-linéaire (paragraphe II) tout invariant du premier ordre est en fait d'ordre zéro $X(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} B(u(x))dx$. Il y a une exception pour $X_k(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\ell^k(u).u_x|dx$ lorsque $\ell^k(u) = \frac{\partial \mu}{\partial u}$ est un gradient ($\mu : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$) ; remarquons que c'est toujours le cas si $N = 2$.

Lorsque le système est linéairement dégénéré, le résultat est essentiellement le même, mais les exceptions sont plus nombreuses ; en fait le cas $\ell^k(u) = \frac{\partial \mu}{\partial u}$ peut (et c'est le cas si $N = 2$) conduire à une classe plus large d'invariants du premier ordre, paramétrée par les fonctions continues de deux variables.

Ce phénomène se produit également pour certains systèmes mixtes, par exemple pour la dynamique des gaz linéiques :

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0 & \text{conservation de la masse,} \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 + p(\rho))_x = 0 & \text{conservation de la quantité de mouvement,} \\ (\rho e)_t + (\rho u e + p u)_x = 0 & \text{conservation de l'énergie.} \end{cases}$$

En variables (ρ,u,e), le système est hyperbolique si $p'(\rho) > 0$: $\lambda_1 = u - \sqrt{p'}$, $\lambda_2 = u$, $\lambda_3 = u + \sqrt{p'}$. Si $(\rho^2 p')' > 0$, alors $\frac{\partial \lambda_1}{\partial u}.r^1 < 0 \equiv \frac{\partial \lambda_2}{\partial u}.r^2 < \frac{\partial \lambda_3}{\partial u}.r^3$. Enfin, $\ell^2 = \frac{\partial z}{\partial u}$, $z = e - \int_{\rho_o}^{\rho} \frac{1}{s^2} p(s)ds$. On en déduit que les invariants du premier ordre s'écrivent $X(u) = X_o(u) + \int_{-\infty}^{+\infty} h(z,\frac{1}{\rho}z_x)z_x dx$, où X_o est invariant d'ordre zéro.

B. CALCUL DES VARIATIONS : FORMES QUADRATIQUES POSITIVES SUR UN CONE.

Le calcul des variations concerne les problèmes du type

$$(\mathcal{P}_{\mathcal{U}}) \quad \begin{cases} \text{Trouver } u \in \mathcal{U} \quad \text{tel que} \\ I(u) \leq I(v) = \int_\Omega f(x,v(x))dx \quad \forall\, v \in \mathcal{U} \ . \end{cases}$$

L'ensemble $\mathcal{U}$ est un fermé d'un espace fonctionnel $\mathcal{Z}(\Omega) = \{u \in (L^\infty(\Omega))^N \ ; \ \forall\ 1 < k \leq p, \ \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} a_{ijk} \in L^\infty(\Omega)\}$.

Une condition nécessaire et suffisante pour que le problème $(\mathcal{P}_{\mathcal{U}})$ soit résoluble pour tout fermé borné $\mathcal{U}$ est que la fonctionnelle $u \longmapsto I(u)$ soit faiblement-étoile semi-continue inférieurement. Ceci implique, si $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^N)$, que

$$\sum_{r,s=1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial u_r \partial u_s}(x,u)\, v_r\, v_s \geq 0 \quad \text{pour tout } u \in \mathbb{R}^N \text{ et tout élément } v$$

appartenant à un certain cône Λ de $\mathbb{R}^N$. Lorsque f est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^N$, cette condition est équivalente (F. Murat-L. Tartar) à "$u \longmapsto I(u)$ est faible-* s.c.i sur $Z(\Omega)$" ; elle s'écrit alors

$$f(v) \geq 0 \quad \forall\, v \in \Lambda \qquad (1).$$

Nous étudions dans cette partie la condition (1) que nous comparons à la suivante :

$$f = f_+ + f_o \quad \text{où} \quad \begin{cases} f_+ \geq 0 & \text{sur } \mathbb{R}^N \\ f_o \equiv 0 & \text{sur } \Lambda \end{cases} \qquad (2).$$

Il est clair que (2) implique (1). Dans le but de classifier les formes vérifiant (1) (formes Λ-convexes), nous établissons des conditions nécessaires et suffisantes sur Λ (de type géométrique) pour que (2) soit équivalent à (1). Lorsque ce n'est pas le cas, nous caractérisons les formes vérifiant (1) mais pas (2).

Nous considérons alors plusieurs exemples, dont le plus important et le plus difficile est la condition de Legendre-Hadamard :

$$\begin{cases} q \text{ est une forme quadratique sur } M_{nxm}(\mathbb{R}), \\ rg\ v = 1 \implies q(v) \geq 0. \end{cases}$$

On retrouve, par des voies totalement différentes, le résultat de Terpstra, soit :

i) si $n \leq 2$ ou $m \leq 2$ alors (1) $\iff$ (2)

ii) si $n \geq 3$ et $m \geq 3$ alors (1) $\not\iff$ (2).

Nous en déduisons une classe de fonctionnelles quadratiques $J[y] = \int_\Omega q(\text{grad } y(x))dx$, définies sur $(H_o^1(\Omega))^m$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$, $m,n \geq 3$, qui sont positives (donc convexes) sans qu'on puisse choisir $q \geq 0$, contrairement à ce qui se produit si n ou m est inférieur ou égal à 2.

C. REMARQUES SUR L'EQUATION DE NAVIER-STOKES STATIONNAIRE.

Cette équation est utilisée pour représenter le mouvement, indépendant du temps, d'un fluide visqueux incompressible remplissant un domaine Ω de $\mathbb{R}^n$, $n = 2$ ou 3. Si $u : \Omega \longmapsto \mathbb{R}^n$ est le champ des vitesses, elle s'écrit :

$$(N\text{-}S) \quad \begin{cases} -\nu\Delta u + (u.\nabla)u + \nabla p = f & \text{dans } \Omega, \quad (1) \\ \text{div } u = 0 & \text{dans } \Omega, \quad (2) \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega. \quad (3) \end{cases}$$

Le coefficient $\nu > 0$ est la viscosité cinématique, p est la pression, f les forces, et g représente le débit à travers les parois (qui peuvent être munies de robinets, de pompes, de roues à aubes infiniment petites, etc...). Les problèmes étudiés ici sont de deux sortes.

C.1) Droites de solutions (n = 2).

Dans le but de mieux comprendre le problème de l'unicité pour l'équation (N-S), on cherche si cette équation peut posséder une infinité de solutions, sous forme d'une droite $\{v + \tau w ; \tau \in \mathbb{R}\}$ dans le cas bidimensionnel.

Si l'ouvert Ω est borné et simplement connexe, c'est impossible car l'ensemble des solutions est borné (E. Hopf). Nous montrons que c'est également impossible pour un ouvert borné lorsque w vérifie certaines conditions de régularité.

Par contre (Corollaire 2) nous exhibons des droites de solutions lorsque Ω est l'extérieur d'un disque ($\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 ; r = |x| > R_1\}$) avec $f = f_r(r)e_r + f_\theta(r)e_\theta$, $g = C_1 e_r + C_2 e_\theta$, $C_i \in \mathbb{R}$ et $\nu^{-1}R_1C_1 < -1$. Cette dernière condition est requise pour que chaque solution de la droite soit d'intégrale de Dirichlet $\int_\Omega |\nabla u|^2 dx$ finie, et ait ainsi un sens physique (R. Finn). Ce résultat contraste avec le cas où $\nu^{-1}R_1C_1$ est petit et $f = 0$, puisqu'alors l'équation de Navier-Stokes ne possède qu'une seule solution ayant un sens physique.

C.2) Existence de solutions pour des données peu régulières.

Supposons que l'ouvert Ω est borné, que son bord $\partial\Omega$ est une sous-variété fermée de codimension 1 et de classe $\mathcal{C}^2$ (le bord sera seulement lipschitzien pour certaines applications). L'existence d'une solution $u \in H^1(\Omega)^n$ est bien connue (E. Hopf) lorsque $f \in (H^{-1}(\Omega))^n$ et $g \in (H^{1/2}(\partial\Omega))^n$ (g vérifiant des conditions de circulation) et découle de l'estimation "a priori" $\frac{\nu}{2}\int_\Omega |\nabla(u-\bar{u})|^2 dx \leq \langle f, u-\bar{u}\rangle$, où $\bar{u} \in (H^1(\Omega))^n$ est convenablement choisi, vérifiant (2) et (3).

Nous montrons que cette estimation a encore lieu lorsque $f \in (W^{-1,p}(\Omega))^n$, $g \in (W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega))^n$, $\frac{n}{2} < p < 2$. Pour cela on approche la partie peu régulière de u : on aura $\bar{u} \in (W^{1,p}(\Omega))^n$ mais $u-\bar{u} \in (H^1(\Omega))^n$. En fait, soit $u_o \in (W^{1,p}(\Omega))^n$ la solution du problème de Stokes :

$$(S)\quad \begin{cases} -\nu\Delta u_o + \nabla p' = f & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} u_o = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u_o = g & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Alors $u-u_o \in (W^{1,q}(\Omega))^n$ où $q > p$. En particulier, la partie singulière ne dépend pas de la solution u choisie. Ceci nous permet de prouver l'unicité de la solution lorsque f et g sont petits dans $(W^{-1,p}(\Omega))^n$ et $(W^{1-(1/p),p}(\partial\Omega))^n$ respectivement.

Nous appliquons notre méthode à deux exemples, la cavité et le problème de Taylor, pour lesquels la condition au bord présente des discontinuités de première espèce (et donc $g \notin (H^{1/2}(\partial\Omega))^n$). Nous calculons les singularités de u et p au voisinage de ces discontinuités (en particulier ∇u et p croissent en $\frac{1}{|x-x_o|}$ au voisinage de celles-ci).

Enfin, nous indiquons comment résoudre le problème d'évolution lorsque f(x,t) et g(x,t) sont lipschitziens par rapport au temps, à valeurs dans $(W^{-1,p}(\Omega))^n$ et $(W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega))^n$. Là encore, nous obtenons l'existence d'une solution $u \in L^\infty(0,T\ ;\ (L^2(\Omega))^n) \cap L^2(0,T\ ;\ (W^{1,p}(\Omega))^n)$.

Dans ce travail, on fait usage systématiquement des résultats de régularité pour le problème de Stokes (L. Cattabriga), et on montre essentiellement qu'ils restent valables pour l'équation de Navier-Stokes lorsque $p > \frac{n}{2}$.

S O M M A I R E

I. *Les invariants du premier ordre de l'équation d'Euler en dimension trois.*

II. *Les invariants locaux de l'équation de Korteweg de Vries.*

III. *Invariants du premier ordre des systèmes hyperboliques semi-linéaires.*

IV. *Relations d'ordre entre formes quadratiques en compacité par compensation.*

V. *Condition de Legendre-Hadamard ; espaces de matrices de rang ≠ 1.*

VI. *Formes quadratiques et calcul des variations.*

VII. *Droites de solutions pour l'équation de Navier-Stokes stationnaire bidimensionnelle.*

VIII. *Equations de Navier-Stokes stationnaire avec données peu régulières. Application aux problèmes de Taylor et de la cavité.*

LES INVARIANTS DU PREMIER ORDRE DE L'EQUATION D'EULER EN DIMENSION TROIS

D. SERRE

A paraître : Archive for Rational Mechanic and Analysis

0. Introduction :

Considérons un fluide parfait incompressible non visqueux, remplissant un domaine connexe Ω , ouvert de $\mathbb{R}^3$ dont la paroi Γ est une sous-variété fermée de codimension 1, de classe C^1 . Notons $\vec{n}$ la normale unitaire, extérieure, à Γ .

Le mouvement de ce fluide obéit à l'équation d'Euler, qui lie la vitesse $\vec{u}$ du fluide, la pression p , et les forces $\vec{f}$ (Serrin [7]) :

$$(E)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}.\nabla)\vec{u} + \nabla p = \vec{f} & \text{dans } \Omega \quad (E1) \\ \operatorname{div} \vec{u} = 0 & \text{dans } \Omega \quad (E2) \\ \vec{u}.\vec{n} = 0 & \text{sur } \Gamma \quad (E3) \end{cases}$$

Le problème de Cauchy associé à ce système est encore en partie ouvert, malgré les efforts de nombreux mathématiciens. Résumons l'état des connaissances à ce sujet :

- Ebin-Marsden [2] , Kato [4] , Temam [8] montrent l'existence d'une solution $\vec{u}(x,t)$ définie sur un petit intervalle de temps $(0,T_0)$, où T_0 dépend de la condition initiale $\vec{u}_0$.

- Dans le cas des écoulements bidimensionels, Wolibner [9] , Judovitch [3] , Kato [5] montrent l'existence d'une solution $\vec{u}(x,t)$ définie sur un intervalle de temps infini pour toute condition initiale suffisamment régulière ($\vec{u}_0 \in C^{1+\varepsilon}(\Omega)$ ou $\vec{u}_0 \in H^s(\Omega)$, $\varepsilon > 0$, $s > 2$).

Les démonstrations d'existence sont toutes basées sur des estimations "a priori" des dérivées premières en espace de $\vec{u}$ (néanmoins, l'estimation des dérivées d'ordre supérieur conduit à l'existence de solutions plus régulières). Les résultats énoncés ci-dessus sont basés sur les estimations suivantes (à $\vec{f}$ fixé) :

- problème tri-dimensionel : il existe une fonction décroissante $s \to T_0(s)$, et une fonction :

$$(s,t) \to L(s,t)$$

définie pour $t < T_0(s)$, croissante en s et en t , telles que, si $\vec{u}(x,t)$ est une solution de l'équation d'Euler de classe $C^{1+\varepsilon}(\bar{\Omega})$ ou $H^s(\Omega)$ ($\varepsilon > 0$, $s >$) , on a (avec $V = C^{1+\varepsilon}(\bar{\Omega})$ ou $H^s(\Omega)$) :

$$0 \le t < T_0(\| u(0)\|_V) \ , \ \|\vec{u}(t)\|_V \le L(\| \vec{u}(0)\|_V \ , \ t \ )$$

- Problème bi-dimensionel : pour toute solution $\vec{u}(t)$ suffisamment régulière (i.e. pour que les intégrales ci-dessous existent) de l'équation d'Euler, et pour toute fonction numérique ψ de classe C^1 , on a :

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega \psi(\text{rot } \vec{u}(x,t))dx = \int_\Omega \psi'(\text{rot } \vec{u}(x,t)) \ \text{rot } \vec{f}(x,t))dx$$

La propriété évoquée dans ce dernier cas exprime que $\vec{u} \to \psi(\text{rot } \vec{u})$ est un invariant du premier ordre de l'équation d'Euler bi-dimensionnelle.Nous allons maintenant définir la notion d'invariant pour ce problème.

I. Invariants de l'équation d'Euler :

Désignons par D l'opérateur de différentiation sur $\mathbb{R}^n$. Si q est une fonction numérique sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, et si $x \in \mathbb{R}^n$, pour $K \in \mathbb{N}$, $D^k q(x)$ est un tenseur symétrique d'ordre k sur $\mathbb{R}^n$. Désignons par $L_K(\mathbb{R}^n)$ l'espace vectoriel des applications K-linéaires sur $\mathbb{R}^n$: $D^k q(x) \in L_K(\mathbb{R}^n)$. Le k-jet de l'application q en x est :

$$J_k(q)(x) = (q(x), Dq(x), \ldots\ldots, D^k q(x)) \in \prod_{j=0}^{k} L_j(\underline{\underline{R}}^n)$$

Notons $X_{n,k} = \left(\prod_{j=0}^{K} (L_j(\underline{\underline{R}}^n))\right)^n$. Si ϕ est une fonction numérique de classe C^1 définie sur $X_{n,k}$, notons $D\phi_y$ sa différentielle en un point $y \in X_{n,K}$.

Définition : Un invariant d'ordre k de l'équation n-dimensionnelle d'Euler est une fonction numérique $\phi \in C^1(X_{n,k}; \underline{\underline{R}})$, et vérifiant, pour tout champ de force $\vec{f} \in (C^k \bar{\Omega}))^n$, et pour toute solution $\vec{u}(x,t) \in (C^{k+1}(\bar{\Omega}))^n$ de l'équation d'Euler :

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega \phi(J_k(\vec{u})(x,t))dx = \int_\Omega D\phi_{J_n(\vec{u})(x,t)} \cdot J_k(\vec{f})(x,t)dx$$

Exemple : Dans le cas 2-dimensionel cité précédemment :

$$\phi\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix}\right) = \psi(v_{12} - v_{21})$$

est un invariant d'ordre 1 de l'équation d'Euler pour toute fonction ψ numérique de classe C^1 .

Compte-tenu de l'importance des invariants du premier ordre pour le problème de Cauchy associé à l'équation d'Euler, il nous a paru utile de déterminer tous les invariants du premier ordre de l'équation tri-dimensionnelle. Ce sont les fonctions numériques ϕ de classe C^1 définies sur $X_{3,1} = \mathbb{R}^3 \times M_3(\mathbb{R})$:

$$(u,v) \mapsto \phi(u,v)$$

$$\mathbb{R}^3 \times M_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

vérifiant, pour tout champ $\vec{f} \in C^1(\bar{\Omega})$, pour toute solution $\vec{u}(x,t) \in C^1(\bar{\Omega})$ de l'équation (E) :

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \phi(\vec{u}(x,t), D\vec{u}(x,t))dx = \int_\Omega \sum_{i=1}^{3} f_i \frac{\partial \phi}{\partial u_i}(\vec{u}(x,t), D\vec{u}(x,t))dx$$

$$+ \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} D_i f_j \frac{\partial \phi}{\partial v_{ij}}(\vec{u}(x,t), D\vec{u}(x,t))dx$$

Le but de cet article est de démontrer le résultat suivant :

Théorème : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^3$, dont le bord est une sous-variété fermée de codimension 1, de classe C^1.

Soit ϕ un invariant du premier ordre de l'équation d'Euler relative à Ω.

Alors ϕ est nécessairement une combinaison linéaire des fonctions suivantes :

1/ - L'énergie $\phi(u,v) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} u_i^2$

- L'hélicité $\phi(u,v) = u_1(v_{23}-v_{32})+u_2(v_{31}-v_{13})+u_3(v_{12}-v_{21})$.

(On a alors $\phi(\vec{u},D\vec{u}) = \vec{u}.\vec{rot}\ \vec{u}$).

- Les composantes du champ des vitesses

$$\phi(u,v) = u_i \qquad i \in \{1,2,3\}$$

2/ Les fonctions $\sum_{l,m=1}^{3} \frac{\partial F_l}{\partial u_m}(u)\, v_{l_m}$, $\alpha(u) \det v$, $\sum_{k,l,m,n=1}^{3} \frac{\partial F_l^{mn}}{\partial u_k}(u) v_{mn} v_l$

$\mu(u,\mathrm{Tr}\ v)$, où

$$F_l(u), F_l^{mn}(u) \in C^2(\mathbb{R}^3) \qquad 1 \le l \le 3 \qquad 1 \le m,n \le 3$$

$$F_l^{mn}(u) + F_m^{ln}(u) = 0 \qquad 1 \le l,m,n \le 3$$

$$\mu(u,0) = \text{Constante}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial(\mathrm{Tr}v)}(u,0) = 0$$

Lorsque $v = D\vec{u}$, ces quantités sont alors respectivement :

$\sum_{l=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_l}(F_l(\vec{u}))$, $\alpha(\vec{u})\,\mathrm{Jac}(\vec{u})$, $\sum_{l,m,n=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_l}(F_l^{mn}(\vec{u}) D_m \vec{u}_n)$, $\mu(\vec{u},\mathrm{div}\ \vec{u})$.

Réciproquement, lorsque $\Omega = \mathbb{R}^3$, toute combinaison linéaire de ces fonctions est un invariant du premier ordre de l'équation d'Euler. □

La réciproque est connue pour l'énergie, l'hélicité et les composantes du champ. Quant aux autres invariants du paragraphe 2/, il suffit de remarquer que, pour tous $\vec{f} \in C^1_K(\mathbb{R}^3)$, et $\vec{u} \in C^2_K(\mathbb{R}^3)$ à support compact, on a :

$$\int_\Omega \phi(\vec{u}(x,t)\ ,\ D\vec{u}(x,t))\ dx = \text{constante}$$

$$\int_\Omega D\phi_{J_1(\vec{u})}(x)\, f_1(\vec{f})(x)dx = 0$$

Pour cela, on appelle les invariants du paragraphe 2, les invariants triviaux.

Remarque : Lorsque Ω n'est pas l'espace tout entier, les fonctions citées dans le théorème ne sont pas nécessairement des invariants. Par exemple, si ϕ est l'hélicité, on a :

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega (\vec{u}.\vec{rot}\ \vec{u})(x,t)dx + \int_\Gamma (p - \tfrac{1}{2}|u|^2)\vec{rot}\ \vec{u}.\vec{n}\ d\sigma$$

$$= \int_\Omega \vec{f}.\vec{rot}\ \vec{u}\ dx + \int_\Omega \vec{rot}\ \vec{f}.\vec{u}\ dx$$

L'intégrale sur Γ n'étant généralement pas nulle, l'hélicité n'a pas la propriété d'invariance demandée.

Cependant, il est immédiat que l'énergie $\frac{1}{2}|u|^2$ est toujours un invariant, d'ordre 0 , de l'équation d'Euler (en toute dimension).

Remarque : Une partie de la démonstration qui suit (paragraphes II, III) est faite pour une dimension n arbitraire , $n \geq 2$.

Enfin, l'auteur doit informer le lecteur de la parution (Serre [6]) d'une note fausse sur ce sujet. Dans ce précédent travail, la définition d'un invariant n'est pas naturelle, et le résultat énoncé est incorrect.

II. Réduction du problème :

Dans ce paragraphe, nous trouvons une condition nécessaire pour que ϕ soit un invariant du premier ordre pour un ouvert Ω de dimension n, ne faisant pas intervenir le temps, ni la pression, ni les forces.

Supposons que ϕ soit un tel invariant, $\vec{f}(x,t)$ un champ de forces, $\vec{u}(x,t)$ une solution de l'équation d'Euler, p la pression associée. On a

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \phi(\vec{u},D\vec{u})dx = \int_\Omega \vec{f}.\frac{\partial\phi}{\partial u}(\vec{u},D\vec{u})dx + \int_\Omega D\vec{f} : \frac{\partial\phi}{\partial v}(\vec{u},D\vec{u})dx$$

(si $M \in M_n(\mathbb{R})$, nous notons $M : \frac{\partial\phi}{\partial v} = \sum_{i\geq j=1}^{n} M_{ij}\frac{\partial\phi}{\partial v_{ij}}$)

Utilisons (E1), nous obtenons ($(D\vec{u})^2$ désignant le carré de la matrice $D\vec{u}$):

$$\int_\Omega [(\vec{u}.\nabla)\vec{u} + \nabla p] \cdot \frac{\partial\phi}{\partial u}(\vec{u},D\vec{u})dx$$

$$+ \int_\Omega [(\vec{u}.\nabla)D\vec{u} + (D\vec{u})^2 + D^2p] : \frac{\partial\phi}{\partial v}(\vec{u},D\vec{u})dx = 0 .$$

Or, puisque $\operatorname{div}\vec{u} = 0$ dans Ω, on a :

$$(\vec{u}.\nabla)\vec{u}.\frac{\partial\phi}{\partial u}(\vec{u},D\vec{u}) + (\vec{u}.\nabla)D\vec{u} : \frac{\partial\phi}{\partial v}(\vec{u},D\vec{u})$$

$$= \vec{u}.\nabla(\phi(\vec{u},D\vec{u})) = \operatorname{div}(\phi(\vec{u},D\vec{u})\vec{u})$$

Et puisque $\vec{u}.\vec{n} = 0$ sur $\partial\Omega$:

Il reste: $$\int_\Omega \operatorname{div}(\phi(\vec{u},D\vec{u})\vec{u})dx = \int_{\partial\Omega}\phi(\vec{u},D\vec{u})\vec{u}.\vec{n}\,d\sigma = 0 .$$

$$\int_\Omega (D\vec{u})^2 : \frac{\partial\phi}{\partial v}(\vec{u},D\vec{u})dx + \int_\Omega [\nabla p.\frac{\partial\phi}{\partial u}(\vec{u},D\vec{u}) + D^2p : \frac{\partial\phi}{\partial v}(\vec{u},D\vec{u})dx]$$

$$= 0 \qquad (2.1.)$$

Soit alors un champ de vecteurs stationnaires $\vec{u}(x)$, $\vec{u} \in C^2(\bar{\Omega})$, vérifiant (E2) et (E3) :

$$\begin{aligned} &\operatorname{div} \vec{u} = 0 && \text{dans } \Omega \\ &\vec{u}.\vec{n} = 0 && \text{sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

Par ailleurs , soit p une fonction numérique sur Ω , stationnaire $p \in C^2(\bar{\Omega})$. Posons :

$$\begin{aligned} &\vec{f}(x,t) = \nabla p(x) + (\vec{u}.\nabla)\vec{u}\,(x) && x \in \Omega \\ &\vec{u}(x,t) = \vec{u}(x). && t \in \underline{\underline{R}} \end{aligned}$$

Alors, $\vec{u}(x,t)$ est solution de classe C^2 de l'équation d'Euler pour le champ de forces $\vec{f}$, la pression étant p . Ainsi :

<u>L'équation (2.1.) est vérifiée pour tout champ $\vec{u} \in C^2(\bar{\Omega})$ vérifiant $\operatorname{div} \vec{u} = 0$, $\vec{u}.\vec{n} = 0$, et pour toute fonction</u> $p \in C^2(\bar{\Omega})$.

En ne considérant que les pressions p à support compact dans Ω , on en déduit une condition nécessaire :

<u>Lemme 2.1.</u> : Soit ϕ un invariant du premier ordre de l'équation d'Euler dans Ω . Pour tout champ $\vec{u} \in C^3(\bar{\Omega})$ vérifiant $\operatorname{div} \vec{u} = 0$, $\vec{u}.\vec{n} = 0$, on a :

$$\int_\Omega (D\vec{u})^2 : \frac{\partial \phi}{\partial v}(\vec{u}, D\vec{u})\,dx = 0 \qquad (2.2.)$$

$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \phi}{\partial u_i}(\vec{u}, D\vec{u})\right) + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(\frac{\partial \phi}{\partial v_{ij}}(\vec{u}, D\vec{u})\right) = 0 \qquad (2.3.)$$

□

Supposons maintenant qu'un champ $\vec{u}$ vérifie seulement

$$\begin{aligned} &\vec{u} \in C^3(\bar{\Omega}) \\ &\operatorname{div} \vec{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega \end{aligned}$$

Et soit $x \in \Omega$. Il existe une boule ouverte $B(x,r)$ contenue dans Ω ; une boule étant contractile, il existe une application v , définie sur $B(x,r)$ à valeur dans $\Lambda^{n-2}(\underline{\underline{R}})$, telle que :

$$\begin{aligned} &\vec{u} = \partial V \quad \text{dans } B(x,r) \\ &V \in C^4(B(x,r);\ \Lambda^{n-2}(\underline{\underline{R}})) \end{aligned}$$

Il existe d'autre part un élément ρ de $D(\Omega)$ ayant les propriétés suivantes :

$$\text{Supp } \rho \subset B(x,r)$$
$$\rho(y) = 1 \qquad y \in B(x,\tfrac{r}{2})$$

Définissons V_ρ par :

$$V_\rho(y) = \rho(y)V(y) \quad \text{si} \quad y \in B(x,r)$$
$$V_\rho(y) = 0 \qquad \text{sinon}$$

On a :

$$V_\rho \in C^4(\bar{\Omega} ; \Lambda^{n-2}(\underline{\underline{R}}))$$

Soit alors $\vec{u}_\rho$ le champ de vecteurs $\partial(V_\rho)$.

On a :

$$\text{div } u_\rho = 0 \text{ dans } \Omega$$
$$\text{Supp } u_\rho \subset B(x,r)$$

On peut donc appliquer (2.3.) à $\vec{u}_\rho$. Comme $\vec{u}_\rho = \vec{u}$ dans $B(x,\frac{r}{2})$ l'équation (2.3.) appliquée à $\vec{u}$ est vraie dans $B(x,\frac{r}{2})$. Ainsi :

Lemme 2.2. : Soit ϕ un invariant du premier ordre de l'équation d'Euler dans Ω . Pour tout champ $\vec{u} \in C^3(\bar{\Omega})$ vérifiant div $\vec{u} = 0$, on a (2.3.) dans Ω

□

Supposons maintenant que ϕ est de classe C^3 sur $\mathbb{R}^n \times M_n(\mathbb{R})$, et développons (2.3.). En notant $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, cela s'écrit :

$$- \sum_{i,j} \frac{\partial^2\phi}{\partial u_i \partial u_j} D_i u_j - \sum_{i,j,k} \frac{\partial^2\phi}{\partial u_i \partial v_{jk}} D_i D_j u_k + \sum_{i,j,k,l} \frac{\partial^3\phi}{\partial v_{ij} \partial u_k \partial u_l} D_j u_k D_i u_l$$

$$+ \sum_{i,j,k,l,m} \frac{\partial^3\phi}{\partial v_{ij} \partial v_k \partial v_{lm}} D_j u_k D_i D_l u_m + \sum_{i,j,k} \frac{\partial^2\phi}{\partial v_{ij} \partial u_k} D_i D_j u_k$$

$$+ \sum_{i,j,k,l,m} \frac{\partial^3\phi}{\partial v_{ij} \partial v_{kl} \partial u_m} D_i u_m D_j D_k u_l + \sum_{i,j,k,l,m,n} \frac{\partial^3\phi}{\partial v_{ij} \partial v_{kl} \partial v_{mn}} D_j D_k u_l D_i D_m u_n$$

$$+ \sum_{i,j,k,l} \frac{\partial^2\phi}{\partial v_{ij} \partial v_{kl}} D_i D_j D_k u_l = 0 \qquad (2.4.)$$

Dans cette équation, les indices de sommation varient de 1 à n .

Considérons un point $y \in \Omega$, et $U = (u,v,w,x) \in \mathbb{R}^m$, $m = n\,\frac{n^4-1}{n-1}$:

$U = (u_i, v_{ij}, w_{ijk}, x_{ijkl})$ $\quad 1 \le i,j,k,l \le n$ vérifiant l'ensemble des conditions :

(C)

$$\sum_{i=1}^{n} v_{ii} = 0 \quad , \quad \sum_{i=1}^{n} w_{jii} = 0 \ , \quad \sum_{i=1}^{n} x_{kjii} = 0 \qquad 1 \le j,k \le n$$

$$W_{jil} = W_{ijl} \qquad x_{kjil} = x_{jkil} = x_{kijl} \qquad 1 \le i,j,k,l \le n$$

Il existe alors un champ $\vec{u} \in C^\infty(\bar{\Omega})$ (par exemple polynomial) , tel que :

$$u_i(y) = u_i \ , \ D_i u_j(y) = v_{ij}$$

$$D_i D_j u_k(y) = w_{ijk} \qquad 1 \le i,j,k,l \le n$$

$$D_i D_j D_k u_l(y) = x_{ijkl}$$

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega \ .$$

On peut appliquer (2.4.) à ce champ. On obtient, pour tout U vérifiant (C) :

$$- \sum_{i,j} \frac{\partial^2 \phi}{\partial u_i \partial u_j} v_{ij} - \sum_{i,j,k} \frac{\partial^2 \phi}{\partial u_i \partial v_{jk}} w_{ijk} + \sum_{i,j,k,l} \frac{\partial^3 \phi}{\partial v_{ij} \partial u_k \partial u_l} v_{jk} v_{il}$$

$$+ \sum_{i,j,k,l,m} \frac{\partial^3 \phi}{\partial v_{ij} \partial u_k \partial v_{lm}} v_{jk} w_{ilm} + \sum_{i,j,k} \frac{\partial^2 \phi}{\partial v_{ij} \partial u_k} w_{ijk}$$

$$+ \sum_{i,j,k,l,m} \frac{\partial^3 \phi}{\partial v_{ij} \partial v_{kl} \partial u_m} v_{im} w_{jkl} + \sum_{i,j,k,l,m,n} \frac{\partial^3 \phi}{\partial v_{ij} \partial v_{kl} \partial v_{mn}} w_{jkl} w_{imn}$$

$$+ \sum_{i,j,k,l} \frac{\partial^2 \phi}{\partial v_{ij} \partial v_{kl}} x_{ijkl} = 0 \qquad (2.5.)$$

Les valeurs des fonctions $\frac{\partial^2 \phi}{\partial \partial}$ et $\frac{\partial^3 \phi}{\partial \partial \partial}$ sont prises en (u,v).

L'équation (2.5.) est linéaire par rapport à X , polynomiale par rapport à w ; comme les conditions de (C) sont linéaires, (2.5.) se décompose en 4 équations , et on obtient :

Proposition 2.3. : Soit ϕ un invariant du premier ordre de l'équation d'Euler dans Ω ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$), de classe $C^3(\mathbb{R}^n \times M_n(\mathbb{R}))$. Alors :

i/ Pour tout champ $\vec{u} \in C^1(\bar{\Omega})$ vérifiant div $\vec{u} = 0$, $\vec{u}.\vec{n} = 0$, on a :

$$\int_\Omega (D\vec{u})^2 : \frac{\partial \phi}{\partial v}(\vec{u}, D\vec{u})dx = 0 \qquad (2.2.)$$

ii/ Pour tout $n\,\frac{n^4-1}{n-1}$ - uplet $U = (u,v,w,x)$, vérifiant (C), on a :

$$-\sum_{i,j} \frac{\partial^2 \phi}{\partial u_i \partial u_j} v_{ij} + \sum_{i,j,k,l} \frac{\partial^3 \phi}{\partial v_{ij} \partial u_k \partial u_l} v_{jk}\, v_{il} = 0 \qquad (2.6.)$$

$$\sum_{i,j,k} \left(-\frac{\partial^2 \phi}{\partial u_i \partial v_{jk}} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial v_{ij} \partial u_k}\right) w_{ijk}$$

$$+ \sum_{i,j,k,l,m} \left[\left(\frac{\partial}{\partial v_{ij}} + \frac{\partial}{\partial v_{ji}}\right)\frac{\partial^2 \phi}{\partial v_{lm} \partial u_k}\right] v_{jk}\, w_{ilm} = 0 \qquad (2.7.)$$

$$\sum_{i,j,k,l,m,,} \frac{\partial^3 \phi}{\partial v_{ij} \partial v_{kl} \partial v_{mn}} w_{jkl}\, w_{imn} = 0 \qquad (2.8.)$$

$$\sum_{i,j,k,l} \frac{\partial^2 \phi}{\partial v_{ij} \partial v_{kl}}\, x_{ijkl} = 0 \qquad (2.9.)$$

□

Réciproquement, si ii/ est vérifié, il en est de même de (2.3.) pour tout champ $\vec{u} \in C^3(\bar{\Omega})$ vérifiant div $\vec{u} = 0$, $\vec{u}.\vec{n} = 0$.

III. Un problème d'intégrande nulle :

Soit $\mathcal{E}_K(\Omega) = \{u \in \mathcal{C}^3(\overline{\Omega})$; div $\vec{u} = 0$ et Supp $\vec{u} \subset\subset \Omega\}$. Si ϕ est un invariant du premier ordre de l'équation d'Euler dans Ω, on a (Proposition 2.3) :

$$\forall\, \vec{u} \in \mathcal{E}_K(\Omega) \int_\Omega (D\vec{u})^2 : \frac{\partial \phi}{\partial v}\,(\vec{u}, D\vec{u})\, dx = 0$$

Pour obtenir des renseignements sur ϕ, nous sommes donc conduits à étudier les fonctions $F(u,v)$, définies sur $\mathbb{R}^n \times M_n(\mathbb{R})$, et vérifiant :

$$\forall\, \vec{u} \in \mathcal{E}_K(\Omega) \int_\Omega F(\vec{u}, D\vec{u})\, dx = 0 \qquad (3.1)$$

Une telle fonction F est appelée une intégrande nulle sur $\mathcal{E}_K(\Omega)$.

Dans ce paragraphe, on démontre :

Proposition 3.1 : Soit F une intégrande nulle sur $\mathcal{E}_K(\Omega)$, de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Il existe une décomposition

$$F(u,v) = G(u,v) + J(u,v)$$

vérifiant :

i) G(u,v) est une combinaison linéaire de sous-déterminants de la matrice v, dont les coefficients sont des fonctions de u.

ii) $(\mathrm{Tr}\ v = 0 \Rightarrow (J(u,v) = 0)$ □

Remarque : La proposition 3.1 donne une condition nécessaire pour que F soit une intégrande nulle sur $\mathcal{E}_K(\Omega)$, mais non suffisante. Par exemple la méthode utilisée pour démontrer la proposition permet de prouver que, lorsque $\rho \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} ; \mathbb{R})$ et $\rho'' \not\equiv 0$, $F(u,v) = \rho(u_1)\, v_{12}$ n'est pas une intégrande nulle sur $\mathcal{E}_K(\Omega)$.

Cependant, puisque les sous-déterminants de la matrice Du sont des divergences, on a :

Proposition 3.2 :Si F admet une décomposition F = G + J, où G est indépendante de u, alors F est une intégrande nulle sur $\mathcal{E}_K(\Omega)$. □

Remarque :La proposition 3 .1 est une variante d'un problème étudié par Ball [1]. Dans cet article, Ball étudie les intégrandes nulles sur l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$. Cependant, la démonstration de la proposition 3.1 est plus compliquée.

Démonstration de la proposition 3.1 : Soit $\psi : \mathcal{E}_K(\Omega) \longmapsto \mathbb{R}$ l'application :

$$\psi(\vec{u}) = \int_\Omega F(\vec{u}, D\vec{u})\, dx$$

Cette application est identiquement nulle. Si nous différentions m fois cette application, nous otenons ($\mathcal{D}$ désignant l'opérateur de différenciation sur $\mathcal{E}_K(\Omega)$) :

$$\mathcal{D}^m \psi_u (\vec{h}^1, \ldots, \vec{h}^m) = 0 \qquad \forall (\vec{h}^r)_{1\le r\le m} \in (\mathcal{E}_K(\Omega))^m \tag{3.2}$$

quitte à changer l'origine de $\mathbb{R}^n$, nous pouvons supposer que $0 \in \Omega$. Soit alors :

$$u_o \in \mathbb{R}^n \qquad v_o \in H = \{v \in M_n(\mathbb{R}) \ ; \ \mathrm{Tr}\ v = 0\}$$

Il existe $\vec{u} \in \mathcal{E}_K(\Omega)$ tel que :

$$\vec{u}(0) = u_o \qquad D\vec{u}(0) = v_o \tag{3.3}$$

Soit $(\vec{h}^r)_{1\le r\le m} \in (\mathcal{E}_K(\mathbb{R}^n))^m$

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ notons :

$$\vec{h}^r_\lambda(x) = \vec{h}^r(\lambda x)$$

On a, pour $\lambda > 0$:

$$\mathrm{Supp}\ \vec{h}^r_\lambda = \frac{1}{\lambda}\ \mathrm{Supp}\ \vec{h}^r$$

Pour $\lambda \geq \lambda_o$, on a donc :

$$(h_\lambda^r)_{1\leq r\leq m} \in (\mathcal{E}_K(\Omega))^m$$

D'autre part, si $m \geq 1$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left.\frac{\partial^m F}{\partial v^m}\right|_{(u_o,v_o)} (D\vec{h}^1,\ldots,D\vec{h}^m)\, dx = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{n-m} \mathcal{D}^m \psi_{\vec{u}} (\vec{h}_\lambda^1,\ldots,\vec{h}_\lambda^m)$$

Avec (3.2), on en déduit :

Lemme 3.3 :Soit $m \in \mathbb{N}^*$, $u_o \in \mathbb{R}^n$, $v_o \in H$. On a :

Pour tout $(\vec{h}^r)_{1\leq r\leq m} \in (\mathcal{E}_K(\mathbb{R}^n))^m$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left.\frac{\partial^m F}{\partial v^m}\right|_{(u_o,v_o)} (D\vec{h}^1,\ldots,D\vec{h}^m)\, dx = 0 \qquad \square$$

On est donc ramené à l'étude des formes θ m-linéaires symétriques sur $M_n(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}} \theta(D\vec{h}^1,\ldots,D\vec{h}^m)\, dx = 0 \\ \text{Pour tout } (\vec{h}^r)_{1\leq r\leq m} \in (\mathcal{E}_K(\mathbb{R}^n))^m \end{cases} \qquad (3.4)$$

Dans un premier temps, montrons :

Lemme 3.4 :Soit θ une forme m-linéaire symétrique sur $M_n(\mathbb{R})$, vérifiant (3.4) .

Si θ ne dépend que des v_{ij}^r, $1 \leq r \leq m$, $1 \leq i \leq n$, alors θ appartient à l'idéal engendré par les $Tr(v^r)$, $1 \leq r \leq m$. $\square$

Démonstration du lemme (3.4) : Soit $I = \{1,\ldots,n\}$.

On a $\theta(v^1,\ldots,v^m) = \sum_{i\in I^m} c(i) \prod_{r=1}^m v_{i_r i_r}^r$

et, pour tout $(h^r)_{1\le r\le m} \in (\mathcal{E}_K(\mathbb{R}^n))^m$:

$$\int_\Omega \theta(Dh^1,\ldots,Dh^m)\,dx = 0$$

ou

$$\sum_{i\in I^m} \int_\Omega c(i)\,\Big(\prod_{r=1}^{m} D_{i_r}\, h^r_{i_r}\Big)\,dx = 0$$

Nous intégrons chaque terme de la somme par parties, en intégrant $D_{i_m}\, h^m_{i_m}$ et en dérivant le reste :

$$\sum_{i\in I^m} \int_\Omega c(i)\, h^m_{i_m}\, D_{i_m}\Big(\prod_{r=1}^{m-1} D_{i_r}\, h^r_{i_r}\Big)\,dx = 0$$

pour tout $(\vec{h}^r)_{1\le r\le m} \in (\mathcal{E}_K(\mathbb{R}^n))^m$.

Rappelons que si $\vec{w}(x)$ vérifie :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \vec{w}(x)\,.\,\vec{u}(x)\,dx = 0$$

pour tout $\vec{u} \in \mathcal{E}_K(\mathbb{R}^n)$, alors rot $\vec{w} = 0$.

On a donc, pour tout $p,q \in I$, $p \neq q$, et pour tout $(\vec{h}^r)_{1\le r\le m-1} \in (\mathcal{E}_K(\mathbb{R}^n))^{m-1}$

$$D_p\, D_q\Big(\sum_{i\in I^{m-1}} (c(i,p) - c(i,q))\prod_{r=1}^{m-1} D_{i_r}\, h^r_{i_r}\Big) = 0 \qquad (3.5)$$

La méthode utilisée dans II pour passer de (2.4) à (2.5) montre que pour tout $(\vec{h}^r)_{1\le r\le m-1} \in (\mathcal{E}_K(\mathbb{R}^n))^{m-1}$

$$\sum_{i\in I^{m-1}} (c(i,p) - c(i,q))\Big(\prod_{r=2}^{m-1} D_{i_r}\, h^r_{i_r}\Big)\, D_p\, D_q\, D_{i_1}\, h^1_{i_1} = 0 \qquad (3.6)$$

Lemme 3.5 :Soient α_j , $1 \le j \le n$, des nombres réels et $p,q \in I$, $p \neq q$.
Si pour tout $\vec{h} \in \mathcal{E}_K(\mathbb{R}^n)$, on a $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, D_p\, D_q\, D_j\, h_j = 0$.
Alors pour tout $\vec{h} \in \mathcal{E}_K(\mathbb{R}^n)$:

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, D_j\, h_j = 0. \qquad \square$$

De (3.6) et du lemme 3.5), on déduit :

Pour tout $(\vec{h}^r)_{1\le r\le m-1} \in (\mathcal{E}_K(\mathbb{R}^n))^{m-1}$

$$\sum_{i\in I^{m-1}} (c(i,p) - c(i,q)) \prod_{r=1}^{m-1} D_{i_r} h^r_{i_r} = 0 \qquad (3.7)$$

C'est-à-dire :

Pour tout $(a^r)_{1\le r\le m-1} \in (\mathbb{R}^n)^{m-1}$, tels que $\sum_{i=1}^{n} a^r_i = 0 \ \forall\, r$:

$$\sum_{i\in I^{m-1}} (c(i,p) - c(i,q)) \prod_{r=1}^{m-1} a^r_{i_r} = 0 \qquad (3.8)$$

Soit alors $\vec{a}^m \in \mathbb{R}^n$, tel que $\sum_{i=1}^{n} a^m_i = 0$. On a :

$$\sum_{i\in I^m} c(i) \prod_{r=1}^{m} a^r_{i_r} = \sum_{p=1}^{m-1} \sum_{i\in I^{m-1}} (c(i,p) - c(i,q))\, a^m_p \prod_{r=1}^{m-1} a^r_{i_r} = 0$$

C'est-à-dire :

$$\begin{cases} \text{Pour tout } (\vec{a}^r)_{1\le r\le m} \in (\mathbb{R}^n)^m, \text{ tels que } \sum_{i=1}^{n} a^r_i = 0, \ \forall\, r \le m \\ \\ \text{on a } \sum_{i\in I^m} c(i) \prod_{r=1}^{m} a^r_{i_r} = 0 \end{cases}$$

On en déduit que le polynôme $\sum_{i\in I^m} c(i) \prod_{r=1}^{m} a^r_{i_r}$ appartient à l'idéal engendré par les $\sum_{i=1}^{n} a^r_{i_r}$, $1 \le r \le m$.

Cela prouve le lemme 3.4. □

Démonstration du lemme 3.5 : La méthode utilisée au paragraphe II montre qu'il existe des nombres χ_{ab}, $a \le b$ tels que :

Pour tout $\vec{h} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j D_p D_q D_j h_j = \sum_{a,b} \chi_{ab} D_r D_s (\operatorname{div} \vec{h}) .$$

Nous identifions les coefficients de chaque dérivée troisième dans les deux membres.

Pour $D_a^3 h_a$, nous obtenons :

$$\chi_{aa} = 0 \qquad 1 \leq a \leq n$$

Si $a \in \{p,q,b\}$, pour $D_a^2 D_b h_a$, nous obtenons

$$\chi_{ab} = 0 \qquad 1 \leq a \leq b \leq n \ , \ a \neq p, a \neq q \ .$$

Enfin, il reste (en supposant $p < q$) :

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j D_p D_q D_j h_j = \chi_{pq} D_p D_q (\text{div } h)$$

c'est-à-dire $\alpha_j = \chi_{pq}$, $1 \leq j \leq n$. D'où le lemme 3.5 □

Montrons alors le :

Lemme 3.6 :Soit θ une forme m-linéaire symétrique sur $M_n(\mathbb{R})$, vérifiant (3.4).

Si θ appartient à l'idéal engendré par les v^r_{ii}, $1 \leq r \leq m$, $1 \leq i \leq n$, alors θ appartient à l'idéal engendré par les $\text{Tr}(v^r)$, $1 \leq r \leq m$.

Démonstration du lemme 3.6 :

On a $\theta(v^1,\ldots,v^m) = \sum_{i,j \in I^m} c(i,j) \prod_{r=1}^{m} v^r_{i_r j_r}$.

Fixons $2(m-k)$ indices $i_{k+1},\ldots,i_m$ et $j_{k+1},\ldots,j_m$ vérifiant $i_r \neq j_r$, $k+1 \leq r \leq m$.

Si $i \in I^k$, on note $\begin{cases} \hat{i} = (i,i_{n+1},\ldots,i_m) \\ \hat{j} = (i,j_{n+1},\ldots,j_m) \end{cases}$

Soit alors :

$$\hat{\theta}(v^1,\ldots,v^m) = \sum_{i \in I^k} c(\hat{i},\hat{j}) \prod_{r=1}^{m} v^r_{i_r j_r}$$

On a :

$$\hat{\theta}(v^1,\ldots,v^m) = \Big(\prod_{r=k+1}^{m} v^r_{i_r j_r}\Big) \sum_{i\in I^k} c(i,j) \prod_{r=1}^{k} v^r_{i_r i_r}$$

Soit

$$\bar{\theta}(v^1,\ldots,v^k) = \sum_{i\in I^k} c(i,j) \prod_{r=1}^{k} v^r_{i_r i_r} .$$

La forme k-linéaire $\bar{\theta}$ est symétrique.

Remarque : $\bar{\theta}$ dépend du choix des 2(m-k) indices i_r, j_r, $k+1 \le r \le m$.

Soit alors $(\rho^r)_{k+1\le r\le m} \in (\mathcal{D}(\mathbb{R}^n))^{m-k}$, tel que $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho^r \, dx_{i_r} = 0$

Il existe $(\vec{g}^r)_{k+1\le r\le m} \in (\mathcal{E}_K(\mathbb{R}^n))^{m-k}$ tel que :

$$D_{i_r} g^r_{j_r} = \rho^r \qquad k+1 \le r \le m.$$

Ainsi pour tout $(\vec{h}^r)_{1\le r\le h} \in (\mathcal{E}_K(\mathbb{R}^n))^k$

pour tout $(\rho^r)_{k+1\le r\le m} \in (\mathcal{D}(\mathbb{R}^n))^{m-k}$, tel que $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho^r \, dx_{i_r} = 0$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Big(\prod_{r=k+1}^{m} \rho^r\Big) \, \bar{\theta}(D\vec{h}^1,\ldots,D\vec{h}^k) \, dx = 0$$

On en déduit :

$$\begin{cases} \text{Pour tout } (h^r)_{1\le r\le k} \in (\mathcal{E}_K(\mathbb{R}^n))^k \\ \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \bar{\theta}(D\vec{h}^1,\ldots,D\vec{h}^k) \, dx = 0 \end{cases}$$

D'après le lemme 3.4 , on a :

$\bar{\theta}$ appartient à l'idéal engendré par les $\mathrm{Tr}\, v^r$, $1 \le r \le k$.

Finalement θ se décompose en une somme de termes de la forme :

$$\Big(\prod_{r\in J} v^r_{i_r j_r}\Big) \sum_{i\in I^k} a(i) \prod_{r\notin J} v^r_{i_r i_r}$$

D'après ce qui précède, ces termes sont dans l'idéal engendré par les $\mathrm{Tr}\, v^r$, $1 \le r \le k$. Il en est de même de θ.

Le lemme 3.6 est donc prouvé. □

Soient $u_0 \in \mathbb{R}^n$ et $v_0 \in H$. Posons :

$$\theta(v^1,\dots,v^{n+1}) = \left.\frac{\partial^{n+1} F}{\partial v^{n+1}}\right|_{(u_0,v_0)} (v^1,\dots,v^{n+1})$$

Ecrivons $\theta = \sum_{i,j\in I^{n+1}} c(i,j) \prod_{r=1}^{n+1} v^r_{i_r j_r}$

On a (Lemme 3.3) :

Pour $(\vec{h}^r)_{1\le r\le n+1} \in (\mathcal{E}_k(\mathbb{R}^n))^{n+1}$

$$\sum_{i,j\in I^{n+1}} c(i,j) \int_\Omega \Big(\prod_{r=1}^{n+1} D_{i_r} h^r_{j_r}\Big)\, dx = 0$$

Intégrons par parties chaque terme, en intégrant $D_{i_{n+1}} h^{n+1}_{j_{n+1}}$ et en dérivant le reste. On obtient :

$$\sum_{i,j\in I^{n+1}} c(i,j) \int_\Omega h^{n+1}_{j_{n+1}} D_{i_{n+1}} \Big(\prod_{r=1}^{n} D_{i_r} h^r_{j_r}\Big)\, dx = 0$$

On en déduit que le champ :

$$\Big(\sum_{i\in I^{n+1}} \sum_{j\in I^n} c(i,(j,p))\, D_{i_{n+1}} \Big(\prod_{r=1}^{n} D_{i_r} h^r_{j_r}\Big)\Big)_{1\le p\le n}$$

est de rotationel nul.

La méthode utilisée dans II montre alors que

Pour tout $(\vec{h}^r)_{1\le r\le n} \in (\mathcal{E}_K(\mathbb{R}^n))^n$

Pour $p,q \in I$, $p \neq q$ On a :

$$\sum_{\substack{j\in I^n \\ i\in I^{n+1}}} \{c(i,(j,q))\, D_p D_{i_{n+1}} D_{i_1} h^1_{j_1} - c(i,(j,p))\, D_q D_{i_{n+1}} D_{i_1} h^1_{j_1}\} \prod_{r=2}^{n} D_{i_r} h^r_{j_r} = 0 \tag{3.9}$$

Si $i_r \neq j_r$ pour un indice $r \in \{2,\dots,n\}$, le facteur de $D_{i_r} h^r_{j_r}$ dans le premier membre de (3.9) est nul.

Fixons $i_r \neq j_r$, $2 \le r \le n$. Notons :

$$a(i_1,j_1,i_{n+1},j_{n+1}) = c((i_1,i_2,\dots,i_n,i_{n+1}),(j_1,j_2,\dots,j_n,j_{n+1}))$$

D'après ce qui précède, on a, pour $p \neq q$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{i_1,j_1,i_{n+1}} [a(i_1,j_1,i_{n+1},q)\, D_p D_{i_{n+1}} D_{i_1} h_{j_1} - a(i_1,j_1,i_{n+1},p)\, D_q D_{i_{n+1}} D_{i_1} h_{j_1}] = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (3.10) \\ \text{pour tout } \vec{h} \in \mathcal{E}_K(\mathbb{R}^n) \end{array} \right.$$

Il existe donc des nombres réels χ_{ab}, $1 \le a \le b \le n$, tels que le premier membre de (3.10) soit égal, pour tout $\vec{h} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ à :

$$\sum_{1\le a\le b\le n} \chi_{ab}\, D_a D_b (\operatorname{div} h) \tag{3.11}$$

Nous identifions les coefficients du premier membre de (3.10) avec ceux de (3.11), pour chaque dérivée troisième de h. Soit $i \in I$, $i \neq p$, $i \neq q$.

Pour $D_i^3 h_i$, on trouve

$$\chi_{ii} = 0$$

Pour $D_p D_i^2 h_p$, on trouve $a(i,p,i,q) = \chi_{ii}$, donc :

$$a(i,p,i,q) = 0 \tag{3.12}$$

Pour $D_p\, D_i^2\, D_q$, on trouve :

$$a(i,q,i,p) = 0 \tag{3.13}$$

Finalement, si $\ell,m \in I$:

$$\begin{pmatrix} \ell \neq i \\ m \neq i \end{pmatrix} \Longrightarrow (a(i,\ell,i,m) = 0) \tag{3.14}$$

Vu la symétrie de θ, on a donc prouvé :

Si $i_r \neq j_r$, $1 \leq r \leq n+1$, et s'il existe $r \neq s$, tels que $i_r = i_s$, alors $c(i,j) = 0$.

Or les $n+1$ indices i_r ne peuvent prendre que n valeurs. Deux d'entre eux sont donc égaux et on a :

Si $i_r \neq j_r$, $1 \leq r \leq N+1$, alors $c(i,j) = 0$.

La forme $n+1$-linéaire symétrique θ vérifie donc les hypothèses du Lemme 3.4. Ainsi :

$$\begin{cases} \text{Pour tout } (v^r)_{1\leq r\leq n+1} \in (H)^{n+1}, \text{ et tout } (u_o,v_o) \in \mathbb{R}^n \times H \\ \dfrac{\partial^{n+1} F}{\partial v^{n+1}}\Big|_{(u_o,v_o} \qquad (v^1,\ldots,v^{n+1}) = 0 \end{cases}$$

La restriction de F à l'hyperplan H = Ker Tr est donc ún polynôme dont le degré est au plus n. On peut donc décomposer F, sous la forme :

$$F(u,v) = G_1(u,v) + J_1(u,v)$$

Où :

$$\begin{cases} (v \in H) \Longrightarrow (J_1(u,v) = 0) \\ d_v^o\, G_1 \leq n \end{cases}$$

Le polynôme G_1 est une intégrande nulle sur $\mathcal{E}_K(\Omega)$, puisque c'est le cas pour F et J_1.

Appliquons le Lemme 3.3 à G_1, avec $u_o \in \mathbb{R}^n$, $v_o = 0$. Si $0 \leq m \leq n$, et si :

$$\theta_m(v^1,\ldots,v^m) = \frac{\partial^m G_1}{\partial v^m}\Big|_{(u_o,0)} (v^1,\ldots,v^m)$$

On a :

$$G_1(u_o,v) = \sum_{m=0}^{n} \theta_m(v,\ldots,v)\,\frac{1}{m!} \tag{3.15}$$

Soit $2 \leq m \leq n$, on a :

Pour tout $(h^r)_{1\leq r\leq m} \in (\mathcal{E}_K(\mathbb{R}^n))$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \theta_m(D\vec{h}^1,\ldots,D\vec{h}^m)\,dx = 0$$

De la même façon que lorsque $m = n+1$, on obtient :

$$\begin{cases} \text{Si } i_r \neq j_r,\ 2 \leq r \leq m-1 \text{ et si :} \\ \qquad a_m(i_1,j_1,i_m,j_m) = c_m((i_1,\ldots,i_m),(j_1,\ldots,j_m)) \\ \text{Pour tout } \vec{h} \in \mathcal{E}_K(\mathbb{R}^n), \text{ on a } (p \neq q) : \\ \sum_{i_1,j_1,i_m} [a_m(i_1,j_1,i_m,q)\,D_pD_{i_m}D_{i_1}D_{j_1} - a_m(i_1,j_1,i_m,p)D_qD_{i_m}D_{i_1}h_{j_1}] = 0 \end{cases} \tag{3.16}$$

Il existe donc des nombres réels χ_{ab}, $a \leq b$, (qui dépendent de u_o, i_r,j_r, $2 \leq r \leq m-1$, p,q) tels que

$$\begin{cases} \text{Pour tout } \vec{h} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \\ \sum_{i_1,j_1,i_m} [a_m(i_1,j_1,i_m,q)D_pD_{i_m}D_{i_1}h_{j_1} - a_m(i_1,j_1,i_m,p)D_qD_{i_m}D_{i_1}h_{j_1}] \\ \qquad = \sum_{a\,b} \chi_{ab}\,D_aD_b(\operatorname{div}\vec{h}) \end{cases} \tag{3.17}$$

Nous identifions les coefficients des diverses dérivées troisièmes de h. Nous obtenons, comme dans le cas $m = n+1$:

$$\begin{pmatrix} \ell \neq i \\ \ell' \neq i \end{pmatrix} \Longrightarrow (a_m(i,\ell,i,\ell') = 0) \tag{3.18}$$

Pour $D_p^2 D\, h_q$, $\ell \neq q$, on obtient :

$$\begin{pmatrix} p \neq q \\ \ell \neq q \end{pmatrix} \Longrightarrow (a_m(p,q,\ell,q) = 0 \tag{3.19}$$

De (3.18) et (3.19), on déduit, vu la symétrie de c_m :

$$\begin{cases} \text{Si } i_r \neq j_r,\ 1 \leq r \leq m, \text{ on a :} \\ (c_m(i,j) \neq o) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \text{les } i_r \text{ sont distincts} \\ \text{les } j_r \text{ sont distincts} \end{cases} \tag{3.20}$$

Supposons maintenant que les 2m indices i_r, j_r $(1 \leq r \leq m)$ vérifient :

$$\begin{cases} \text{les } i_r \text{ sont distincts} \\ \text{les } j_r \text{ sont distincts} \\ i_r \neq j_r \quad 1 \leq r \leq m \\ i_1 \neq j_m \quad i_m \neq j_1 \end{cases} \tag{3.21}$$

En gardant les notations de (3.16), nous avons (3.17) en prenant $p = j_1$, $q = j_m$.

Pour $D_{i_1} D_{i_m} D_{j_1} h_{j_1}$, on a :

$$a_m(i_1,j_1,i_m,j_m) = \chi_{i_1 i_m}$$

Et pour $D_{i_1} D_{i_m} D_{j_m} h_{j_m}$, on a :

$$a_m(i_1,j_m,i_m,j_1) = -\chi_{i_1 i_m}$$

Finalement, sous les hypothèses (3.21), on a :

$$c_m((i_1,\ldots,i_m),(j_1,\ldots,j_m)) = -c_m((i_1,\ldots,i_m),(j_m,j_2,\ldots,j_{m-1},j_1)) \tag{3.22}$$

On en déduit que :

$$\theta_m(v,\ldots,v) = \Delta_m(v) + K_m(v) \tag{3.23}$$

où i) Δ_m est une combinaison linéaire des sous-déterminants d'ordre m de la matrice v.

ii) K_m appartient à l'idéal engendré par les v_{ii}, $1 \le i \le n$.

De i) on conclut :

$$\forall\, \vec{h} \in \mathcal{E}_K(\mathbb{R}^n) \qquad \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_m(D\vec{h})\, dx = 0$$

Donc :

$$\forall\, \vec{h} \in \mathcal{E}_K(\mathbb{R}^n) \qquad \int_{\mathbb{R}^n} K_m(D\vec{h})\, dx = 0$$

Si $K_m(v^1,\ldots,v^m)$ est la forme polaire de $K_m(v)$, on a donc :

$$\begin{cases} \text{Pour tout } (\vec{h}^r)_{1\le r\le m} \in (\mathcal{E}_K(\mathbb{R}^n))^m \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} K_m(D\vec{h}^1,\ldots,D\vec{h}^m)\, dx = 0 \end{cases}$$

De plus $K_m(v^1,\ldots,v^m)$ appartient à l'idéal engendré par les v^r_{ii}. Le Lemme 3.6 prouve alors que $K_m(v)$ est divisible par Tr v.

Grâce à (3.15) et (3.23), la proposition 3.1 est maintenant démontrée.

IV.- REDUCTION DE (2.9)

Notations : 1) Si $v \in M_3(\mathbb{R})$, notons $T = \mathrm{Tr}\ v$, $\frac{\partial}{\partial T} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial v_{ii}}$.

2) La porjection sur l'hyperplan $H = \mathrm{Ker}\ \mathrm{Tr}$, parallèlement à $\mathbb{R}I_3$, est notée $v \longmapsto v^D$. On a :

$$v^D = v - \frac{1}{3}(\mathrm{Tr}\ v)\ I_3$$

3) Si $(i,j,k) \in \{1,2,3\}^3$, on note :

$$\varepsilon(i,j,k) = \begin{cases} \varepsilon((i,j,k)) & \text{si } (i,j,k) \in \mathfrak{S}^3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Lorsque $\varepsilon(i,j,k) = +1$, on note :

$$\varepsilon_k = v_{ij} + v_{ji} \qquad \omega_k = v_{ij} - v_{ji}$$

Si $v = D\vec{u}$, on a $\vec{\omega} = \mathrm{rot}\ \vec{u}$.

Dans le changement de variables

$$v \mapsto (v_{11}, v_{22}, v_{33}, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$$

on a les formules de dérivation :

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial v_{ij}} + \frac{\partial}{\partial v_{ji}}\right) \qquad \frac{\partial}{\partial \omega_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial v_{ij}} - \frac{\partial}{\partial v_{ji}}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial v_{ij}} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_k} + \frac{\partial}{\partial \omega_k} \qquad \frac{\partial}{\partial v_{ji}} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_k} - \frac{\partial}{\partial \omega_k}$$

4) Nous notons $\mathcal{C}_X$ l'ensemble des équations vérifiées par X lorsque $\mathcal{C}$ a lieu :

$$\mathcal{C}_X \begin{cases} \sum_{i=1}^{3} X_{\ell m i i} = 0 & 1 \le \ell, m \le 3 \\ X_{ijk\ell} = X_{jik\ell} = X_{ikj\ell} & 1 \le i,j,k,\ell \le 3 \end{cases}$$

□

Soit ϕ un invariant du premier ordre de l'équation d'Euler dans Ω, avec $n = 3$. La proposition 2.3 impose :

$$\begin{cases} \text{Lorsque } T = 0 \text{ et } \mathcal{C}_X \text{ a lieu :} \\ \\ \sum_{i,j,k} \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial v_{ij}\, \partial v_{k\ell}}\, X_{ijk\ell} = 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

Définissons une fonction auxiliaire :

$$\theta(u,v) = \phi(u,v^D)$$

Nous avons

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \theta}{\partial T} = 0 & (4.2) \\ \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial v_{ij}} = \dfrac{\partial \phi}{\partial v_{ij}}\,(v^D) - \delta_i^j\, \dfrac{\partial \phi}{\partial T}\,(v^D) & (4.3) \end{cases}$$

Soit $i \neq j$ et $v \in H$. Le coefficient de X_{iiij} dans (4.1) est nul :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial v_{ii} \partial v_{ij}}\,(v) = 0 \qquad \text{lorsque } T = 0$$

Or

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial v_{ii} \partial v_{ij}} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial v_{ii} \partial v_{ij}}\,(v^D) - \frac{\partial^2 \phi}{\partial T \partial v_{ij}}\,(v^D)$$

Ainsi, lorsque $T = 0$, et $i \neq j$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial v_{ij} \partial v_{ii}} = - \frac{\partial^2 \phi}{\partial v_{ij} \partial T}\,(v^D)$$

Et, en vertu de (4.2) :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial v_{ij} \partial v_{ii}}\,(v) = - \frac{\partial^2 \phi}{\partial v_{ij} \partial T}\,(v^D) \qquad \forall\, v \in M_3(\mathbb{R}) \tag{4.4}$$

D'autre part, $\forall\ 1 \leq i,j,k,\ell \leq 3$:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial v_{ij} \partial v_{k\ell}}\,(v^D) = \frac{\partial^2 \theta}{\partial v_{ij} \partial v_{k\ell}}\,(v) + \delta_i^j\, \frac{\partial^2 \phi}{\partial v_h\, \partial T}\,(v^D) + \delta_k^\ell\, \frac{\partial^2 \phi}{\partial v_{ij} \partial T}\,(v^D)$$

$$- \delta_i^j\, \delta_k^\ell\, \frac{\partial^2 \phi}{\partial T^2}\,(v^D) \tag{4.5}$$

On a, lorsque $\mathcal{C}_\chi$ a lieu :

$$\sum_{i,j,k,\ell} \delta_k^\ell \frac{\partial^2 \phi}{\partial v_{ij} \partial T} (v^D)\, X_{ijk\ell} = 0$$

$$\sum_{i,j,k,\ell} \delta_j^i \delta_k^\ell \frac{\partial^2 \phi}{\partial T^2} (v^D)\, X_{ijk\ell} = 0$$

$$\sum_{i,j,k,\ell} \delta_i^j \frac{\partial^2 \phi}{\partial v_{k\ell} \partial T} (v^D)\, X_{ijk\ell} = - \sum_{i,k\neq\ell} \frac{\partial^2 \theta}{\partial v_{k\ell} \partial v_{kk}} X_{iik\ell} + \sum_{i,k} \frac{\partial^2 \phi}{\partial v_{kk} \partial T} (v^D)\, X_{iikk}$$

Si bien que, (4.1) entraîne :

Lorsque $T = 0$ et $\mathcal{C}_\chi$ a lieu :

$$\sum_{i,j,k,\ell} \frac{\partial^2 \theta}{\partial v_{ij} \partial v_{k\ell}} (v)\, X_{ijk\ell} - \sum_{i,k\neq\ell} \frac{\partial^2 \theta}{\partial v_{k\ell} \partial v_{kk}} (v)\, X_{iik\ell} + \sum_{i,k} \frac{\partial^2 \phi}{\partial v_{kk} \partial T} (v^D) X_{iikk} = 0 \qquad (4.6)$$

En vertu de (4.2), cela devient :

$$\forall\, v \in M_3(\mathbb{R})$$

$$(\mathcal{C}_\chi) \Longrightarrow (4.6)$$

Nous utilisons alors le lemme suivant :

Lemme 4.1 : Soient $a_{ijk\ell}$, $1 \le i,j,k,\ell \le 3$, des nombres réels. Pour que $(\mathcal{C}_\chi) \Longrightarrow \left(\sum_{i,j,k,\ell} a_{ijk\ell} X_{ijk\ell} = 0 \right)$, il faut et il suffit qu'il existe des nombres réels χ_{ab}, $1 \le a \le b \le 3$, tels que, lorsque $X_{ijk\ell} = X_{jik\ell} = X_{ikj\ell}$, on ait :

$$\sum_{i,j,k,\ell} a_{ijk\ell} X_{ijk\ell} = \sum_{a\ b} \chi_{ab} \sum_m X_{abmm} \qquad \square$$

Nous appliquons le Lemme à (4.6) et nous identifions les coefficients des deux formes. Si $\varepsilon(i,j,k) \neq 0$, on a :

$$\begin{cases} \chi_{ii} = \dfrac{\partial^2\theta}{\partial v_{ii}^2} + \dfrac{\partial^2\phi}{\partial v_{ii}\,\partial T}\,(v^D) & (\chi_{iiii}) \\ \chi_{ij} = 2\,\dfrac{\partial^2\theta}{\partial v_{ii}\partial v_{ji}} - \dfrac{\partial^2\theta}{\partial v_{ji}\partial v_{jj}} + \dfrac{\partial^2\theta}{\partial v_{ii}\partial v_{ij}} & (\chi_{iiji}) \\ \chi_{jj} = \dfrac{\partial^2\theta}{\partial v_{jj}\partial v_{ii}} + 2\,\dfrac{\partial^2\theta}{\partial \varepsilon_k\partial v_{ji}} + \dfrac{\partial^2\phi}{\partial v_{ii}\partial T}\,(v^D) & (\chi_{jjii}) \\ \chi_{jk} = 2\,\dfrac{\partial^2\theta}{\partial \varepsilon_k\partial v_{ki}} + 2\,\dfrac{\partial^2\theta}{\partial \varepsilon_j\partial v_{ji}} + 2\,\dfrac{\partial^2\theta}{\partial \varepsilon_i\partial v_{ii}} & (\chi_{ijki}) \\ 0 = 0 & (\chi_{jjji}) \\ 0 = \left(\dfrac{\partial}{\partial v_{jj}} - \dfrac{\partial}{\partial v_{kk}}\right)\dfrac{\partial\theta}{\partial v_{ki}} + 2\dfrac{\partial^2\theta}{\partial \varepsilon_i\partial v_{ji}} & (\chi_{jjki}) \end{cases}$$

L'élimination de χ entraîne, avec $(i,j,k) \neq 0$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\theta}{\partial v_{jj}\partial v_{ii}} + 2\,\dfrac{\partial^2\theta}{\partial \varepsilon_k\partial v_{ji}} - \dfrac{\partial^2\theta}{\partial v_{jj}^2} = \left(\dfrac{\partial}{\partial v_{jj}} - \dfrac{\partial}{\partial v_{ii}}\right)\dfrac{\partial\phi}{\partial T}\,(v^D) & (4.7) \\ \dfrac{\partial^2\theta}{\partial \varepsilon_i\partial v_{jj}} = \dfrac{\partial^2\theta}{\partial \varepsilon_i\partial v_{kk}} & (4.8) \\ 2\sum_{\ell=1}^{3}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial \varepsilon_\ell\partial v_{\ell i}} = \dfrac{\partial^2\theta}{\partial v_{jj}\partial v_{kj}} + \dfrac{\partial^2\theta}{\partial v_{kk}\partial v_{jk}} & (4.9) \\ 2\,\dfrac{\partial^2\theta}{\partial \varepsilon_i\partial v_{ji}} + \left(\dfrac{\partial}{\partial v_{jj}} - \dfrac{\partial}{\partial v_{kk}}\right)\dfrac{\partial\theta}{\partial v_{ki}} = 0 & (4.10) \end{cases}$$

Le système des équations (4.7) est de la forme $a_j - a_i = b_{ji}$, avec $a_i = \dfrac{\partial}{\partial v_{ii}}\,\dfrac{\partial\phi}{\partial T}\,(v^D)$, et $b_{ij} = \dfrac{\partial}{\partial v_{jj}}\left(\dfrac{\partial}{\partial v_{ii}} - \dfrac{\partial}{\partial v_{jj}}\right)\theta + 2\,\dfrac{\partial^2\theta}{\partial \varepsilon_k\partial v_{ji}}$. L'élimination de $\dfrac{\partial\phi}{\partial T}\,(v^D)$, c'est-à-dire de a_i, donne :

$$\begin{cases} \forall\ i \neq j : \quad b_{ij} + b_{ji} = 0 \\ \sum_{i,j,k} \varepsilon(i,j,k)\ b_{ij} = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} 4\ \dfrac{\partial^2 \theta}{\partial \varepsilon_k^2} = \left(\dfrac{\partial}{\partial v_{ii}} - \dfrac{\partial}{\partial v_{jj}}\right)^2 \theta \quad \text{lorsque } \varepsilon(i,j,k) \neq 0 \qquad (4.12) \\ \sum_k \dfrac{\partial^2 \theta}{\partial \varepsilon_k \partial \omega_k} = 0 \qquad (4.12) \end{cases}$$

L'équation (4.10) s'écrit encore :

$$2\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varepsilon_j \partial v_{ij}} + \left(\frac{\partial}{\partial v_{ii}} - \frac{\partial}{\partial v_{kk}}\right) \frac{\partial \theta}{\partial v_{kj}} = 0 \qquad (4.13)$$

$$2\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varepsilon_k \partial v_{ik}} + \left(\frac{\partial}{\partial v_{ii}} - \frac{\partial}{\partial v_{jj}}\right) \frac{\partial \theta}{\partial v_{jk}} = 0 \qquad (4.14)$$

En ajoutant (4.9), (4.13) et (4.14), on obtient :

$$8\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varepsilon_j \partial \varepsilon_k} + 4\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial v_{ii} \partial \varepsilon_i} = 2\ \left(\frac{\partial}{\partial v_{jj}} + \frac{\partial}{\partial v_{kk}}\right) \frac{\partial \theta}{\partial \varepsilon_i}$$

qui devient, en vertu de (4.2) :

$$4\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varepsilon_j \partial \varepsilon_k} + 3\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varepsilon_i \partial v_{ii}} = 0 \qquad \text{si } \varepsilon(i,j,k) \neq 0 \qquad (4.15)$$

En faisant alors la somme $3 \times (4.9) - (4.13) - (4.14)$, on obtient :

$$4\left(\frac{\partial}{\partial v_{ij}} + \frac{\partial}{\partial v_{ji}}\right) \frac{\partial \theta}{\partial \varepsilon_j} = 2\left(\frac{\partial}{\partial v_{jk}} - \frac{\partial}{\partial v_{kj}}\right)\left(\frac{\partial}{\partial v_{ii}} - \frac{\partial}{\partial v_{kk}}\right) \theta$$

$$+ 2\ \frac{\partial}{\partial \varepsilon_i}\left(\frac{\partial}{\partial v_{kk}} - \frac{\partial}{\partial v_{jj}}\right) \theta$$

c'est- à-dire, d'après (4.8) :

$$2\,\frac{\partial^2\theta}{\partial\varepsilon_j\partial\omega_k} = \frac{\partial}{\partial\omega_i}\,\left(\frac{\partial}{\partial v_{ii}} - \frac{\partial}{\partial v_{kk}}\right)\theta \qquad \text{si } \varepsilon(i,j,k) \neq 0 \qquad (4.16)$$

Résumons les équations obtenues :

Proposition 4.1 : Si ϕ est un invariant du premier ordre et si $\theta(v) = \phi(v^D)$, on a :

$$(\mathcal{S})\begin{cases} \dfrac{\partial\theta}{\partial T} = 0 & (4.2) \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial\varepsilon_i}\left(\dfrac{\partial}{\partial v_{jj}} - \dfrac{\partial}{\partial v_{kk}}\right)\theta = 0 \qquad \text{si } \varepsilon(i,j,k) \neq 0 & (4.8) \\[2ex] 4\,\dfrac{\partial^2\theta}{\partial\varepsilon_k^2} = \left(\dfrac{\partial}{\partial v_{ii}} - \dfrac{\partial}{\partial v_{jj}}\right)^2\theta \qquad \text{si } \varepsilon(i,j,k) \neq 0 & (4.11) \\[2ex] \sum_k \dfrac{\partial^2\theta}{\partial\varepsilon_k\partial\omega_k} = 0 & (4.12) \\[2ex] 2\,\dfrac{\partial^2\theta}{\partial\varepsilon_j\partial\omega_k} = \dfrac{\partial}{\partial\omega_i}\left(\dfrac{\partial}{\partial v_{ii}} - \dfrac{\partial}{\partial v_{kk}}\right)\theta \qquad \text{si } \varepsilon(i,j,k) \neq 0 & (4.16) \\[2ex] 4\,\dfrac{\partial^2\theta}{\partial\varepsilon_j\partial\varepsilon_k} + 3\,\dfrac{\partial^2\theta}{\partial\varepsilon_i\partial v_{ii}} = 0 \qquad \text{si } \varepsilon(i,j,k) \neq 0 & (4.15) \end{cases}$$

□

V. DEPENDANCE DE ϕ PAR RAPPORT A v

Dans ce paragraphe, nous établissons le résultat suivant :

Proposition 5.1 :Soit ϕ un invariant du premier ordre de l'équation d'Euler dans Ω (Ω domaine de $\mathbb{R}^3$). Alors il existe une fonction $\alpha(u)$, deux matrices $\beta(u) = ((\beta_{ij}(u)))_{1\leq i,j\leq 3}$, $\gamma(u) = ((\gamma_{ij}(u)))_{1\leq i,j\leq 3}$, et une fonction $\mu(u,v)$; telles que

$$(T = 0) \Longrightarrow \begin{cases} \mu(u,v) = \mu(u,0) \\ \dfrac{\partial \mu}{\partial T}(u,v) = 0 \end{cases}$$

$$\phi(u,v) = \alpha(u) \det v + \sum_{i,j} \beta_{ij}(u)\, \hat{v}_{ij} + \sum_{i,j} \gamma_{ij}(u)\, v_{ij} + \mu(u,v)$$

où $\hat{v}$ désigne la comatrice (dét v) v^{-1}.

Remarque 5.1 : La réciproque est fausse. La dépendance par rapport à u sera déterminée ultérieurement.

Remarque : Si $\varepsilon(i,j,k) \neq 0$, on a

$$\hat{v}_{ij} = v_{ik}\, v_{kj} - v_{ij}\, v_{kk} \qquad \hat{v}_{ii} = v_{jj}\, v_{kk} - v_{jk}\, v_{kj}$$

Posons :

$$\alpha(u,v) = 4\, \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varepsilon_1 \partial \varepsilon_2 \partial \varepsilon_3}$$

Lemme 5.2 : La fonction $\alpha(u,v)$ est indépendante de v. On a :

$$\theta(u,v) = \alpha(u)\, \text{dét}\, v^D + \theta_1(u,v)$$

où - θ_1 vérifie le système ($\mathcal{S}$) de la proposition 4.1

- θ_1 est polynômial par rapport aux variables ε_i

et v_{ij}, $1 \leq i \leq 3$, de degré au plus 2. □

Démonstration du Lemme 5.2 : D'après (4.8), si $j \neq k$:

$$(\frac{\partial}{\partial v_{jj}} - \frac{\partial}{\partial v_{kk}})\ \alpha = 0$$

D'autre part, $\frac{\partial \alpha}{\partial T} = 0$. On en déduit :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial v_{\ell\ell}} = 0 \qquad \forall\ 1 \leq \ell \leq 3 \tag{5.1}$$

D'après (4.11), si $\varepsilon(i,j,k) \neq 0$:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \varepsilon_k} = \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_j} (\frac{\partial}{\partial v_{ii}} - \frac{\partial}{\partial v_{jj}})^2\ \theta \tag{5.2}$$

Mais d'après (4.8) et (4.2), on a :

$$\begin{cases} (\frac{\partial}{\partial v_{ii}} - \frac{\partial}{\partial v_{kk}})\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_j} = 0 \\ (\frac{\partial}{\partial v_{jj}} - \frac{\partial}{\partial v_{kk}})\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_j} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial T}\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_j} = 0 \end{cases}$$

si bien qu'à nouveau :

$$\frac{\partial}{\partial v_{\ell\ell}}\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_j} = 0 \qquad \forall\ 1 \leq i \neq j \leq 3\ ,\ \forall\ 1 \leq \ell \leq 3 \tag{5.3}$$

On déduit alors de (5.2) :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \varepsilon_k} = 0 \qquad \forall\ 1 \leq k \leq 3 \tag{5.4}$$

Enfin, d'après (4.16), si $\varepsilon(i,j,k) \neq 0$:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \omega_k} = 2\ \frac{\partial}{\partial \omega_i} (\frac{\partial}{\partial v_{ii}} - \frac{\partial}{\partial v_{kk}})\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_k}$$

Ce qui, compte tenu de (5.3), donne

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \omega_k} = 0 \qquad \forall\ 1 \leq k \leq 3 \tag{5.5}$$

La fonction α est donc indépendante de v : $\alpha = \alpha(u)$. Posons $\theta_1(u,v) = \theta(u,v) - \alpha(u)$ dét v^D. Comme det v est un invariant trivial, dét v^D vérifie le système $(\mathcal{S})$. Donc θ_1 vérifie le système $(\mathcal{S})$.

D'autre part, on a :

$$\frac{\partial^3 \theta_1}{\partial \varepsilon_1 \partial \varepsilon_2 \partial \varepsilon_3} = 0 \tag{5.6}$$

et l'égalité (5.3) est valable pour θ_1 :

$$\frac{\partial^3 \theta_1}{\partial\, v_{\ell\ell} \partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_j} = 0 \qquad \forall\ 1 \le i \ne j \le 3, \quad \forall\ 1 \le \ell \le 3 \tag{5.7}$$

D'après (4.15), nous avons :

$$\frac{\partial^3 \theta_1}{\partial \varepsilon_i^2 \partial v_{ii}} = 0 \qquad \forall\ 1 \le i \le 3$$

D'autre part, d'après (4.2) et (4.8), si $(i,j,k) \ne o$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial T} \dfrac{\partial^2 \theta_1}{\partial \varepsilon_i^2} = 0 \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial v_{jj}} - \dfrac{\partial}{\partial v_{kk}}\right) \dfrac{\partial^2 \theta_1}{\partial \varepsilon_i^2} = 0 \end{cases}$$

Finalement :

$$\frac{\partial}{\partial v_{\ell\ell}} \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \varepsilon_i^2} = 0$$

En regroupant avec (5.7) :

$$\frac{\partial^3 \theta_1}{\partial v_{\ell\ell} \partial \varepsilon_m \partial \varepsilon_n} = 0 \qquad \forall\ 1 \le \ell,m,n \le 3 \tag{5.8}$$

On en déduit, avec (4.15) :

$$\frac{\partial^3 \theta_1}{\partial \varepsilon_j^2 \partial \varepsilon_k} = 0 \qquad \forall\ 1 \le j \ne k \le 3$$

D'autre part, avec (4.8) et (4.11) :

$$\frac{\partial^3 \theta_1}{\partial \varepsilon_k^3} = 0 \qquad \forall\ 1 \leq k \leq 3$$

En définitive, avec (5.6) :

$$\frac{\partial^3 \theta_1}{\partial \varepsilon_\ell \partial \varepsilon_m \partial \varepsilon_n} = 0 \qquad \forall\ 1 \leq \ell,m,n \leq 3 \qquad (5.9)$$

Puis, (4.15) et (5.8) donnent :

$$\frac{\partial^3 \theta_1}{\partial v_{ii} \partial \varepsilon_i \partial v_{\ell\ell}} = 0 \qquad \forall\ 1 \leq i,\ell \leq 3 \qquad (5.10)$$

Si $j \neq i$, et $(i,j,k) \neq 0$, (4.2) et (4.8) donnent :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial T} \dfrac{\partial^2 \theta_1}{\partial \varepsilon_i \partial v_{jj}} = 0 \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial v_{jj}} - \dfrac{\partial}{\partial v_{kk}}\right) \dfrac{\partial^2 \theta_1}{\partial \varepsilon_i \partial v_{jj}} = 0 \end{cases}$$

Avec (5.10), cela donne :

$$\frac{\partial^3 \theta_1}{\partial \varepsilon_i \partial v_{jj} \partial v_{kk}} = \frac{\partial^3 \theta_1}{\partial \varepsilon_i \partial v_{jj}^2} = 0$$

C'est-à-dire, en groupant avec (5.10) :

$$\frac{\partial^3 \theta_1}{\partial \varepsilon_\ell \partial v_{mm} \partial v_{nn}} = 0 \qquad \forall\ 1 \leq \ell,m,n \leq 3 \qquad (5.11)$$

Puis, (4.11) et (5.8) amènent, si $i \neq j$:

$$\frac{\partial}{\partial v_{\ell\ell}} \left(\frac{\partial}{\partial v_{ii}} - \frac{\partial}{\partial v_{jj}}\right)^2 \theta_1 = 0 \qquad \forall\ 1 \leq \ell \leq 3.$$

Avec (4.2), on en déduit :

$$\frac{\partial^3 \theta_1}{\partial v_{\ell\ell}\partial v_{mm}\partial v_{nn}} = 0 \qquad \forall\ 1 \le \ell,m,n \le 3 \tag{5.12}$$

D'où le Lemme 5.2. □

Calculons alors $\frac{\partial^2}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_k} \frac{\partial \phi}{\partial \bar{T}} (v^D)$, pour $i \neq k$, de deux façons différentes.
D'après (4.4), avec $\phi_1 = \phi - \alpha$ dét v, si $\varepsilon(i,j,k) \neq 0$:

$$2 \frac{\partial}{\partial \varepsilon_i} \frac{\partial \phi_1}{\partial \bar{T}} (v^D) = - \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial v_{jj}\partial v_{jk}} - \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial v_{kk}\partial v_{kj}}$$

$$2 \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_k} \frac{\partial \phi_1}{\partial \bar{T}} (v^D) = - \frac{\partial^3 \theta_1}{\partial v_{jj}\partial \varepsilon_k \partial v_{jk}} - \frac{\partial^3 \theta_1}{\partial v_{kk}\partial \varepsilon_k \partial v_{kj}}$$

D'après le Lemme 5.2, cela revient à :

$$2 \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_k} \frac{\partial \phi_1}{\partial \bar{T}} (v^D) = \left(\frac{\partial}{\partial v_{kk}} - \frac{\partial}{\partial v_{jj}}\right) \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \varepsilon_k \partial \omega_i}$$

Et par (4.16) :

$$4 \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_k} \frac{\partial \theta_1}{\partial \bar{T}} (v^D) = \left(\frac{\partial}{\partial v_{kk}} - \frac{\partial}{\partial v_{jj}}\right)\left(\frac{\partial}{\partial v_{jj}} - \frac{\partial}{\partial v_{ii}}\right) \frac{\partial \theta_1}{\partial \omega_j} \tag{5.13}$$

Avec les mêmes arguments, nous avons :

$$2 \frac{\partial}{\partial \varepsilon_k} \frac{\partial \phi_1}{\partial \bar{T}} (v^D) = - \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial v_{ii}\partial v_{ij}} - \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial v_{jj}\partial v_{ji}}$$

$$4 \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_k} \frac{\partial \phi_1}{\partial \bar{T}} (v^D) = - \frac{\partial^3 \theta_1}{\partial v_{ii}\partial \varepsilon_i \partial v_{ij}} - \frac{\partial^3 \theta_1}{\partial v_{jj}\partial \varepsilon_i \partial v_{ji}}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial v_{jj}} - \frac{\partial}{\partial v_{ii}}\right) \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \varepsilon_i \partial \omega_k} \tag{5.14}$$

$$4 \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_k} \frac{\partial \phi_1}{\partial \bar{T}} (v^D) = \left(\frac{\partial}{\partial v_{jj}} - \frac{\partial}{\partial v_{ii}}\right)\left(\frac{\partial}{\partial v_{jj}} - \frac{\partial}{\partial v_{kk}}\right) \frac{\partial \theta_1}{\partial \omega_j}$$

De (5.13) et (5.14), on tire :

$$\left(\frac{\partial}{\partial v_{jj}} - \frac{\partial}{\partial v_{ii}}\right)\left(\frac{\partial}{\partial v_{jj}} - \frac{\partial}{\partial v_{kk}}\right) \frac{\partial \theta_1}{\partial \omega_j} = 0 \qquad \text{si } \varepsilon(i,j,k) \neq 0 \qquad (5.15)$$

Et d'après (4.16), (4.8) et (4.2) :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial v_{jj}} - \frac{\partial}{\partial v_{kk}}\right)^2 \frac{\partial \theta_1}{\partial \omega_j} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \bar{T}} \left(\frac{\partial}{\partial v_{jj}} - \frac{\partial}{\partial v_{kk}}\right) \frac{\partial \theta_1}{\partial \omega_j} = 0 \end{cases} \qquad \text{si } j \neq k$$

On en déduit :

$$\frac{\partial}{\partial v_{\ell\ell}} \left(\frac{\partial}{\partial v_{jj}} - \frac{\partial}{\partial v_{kk}}\right) \frac{\partial \theta_1}{\partial \omega_j} = 0 \qquad \forall\ 1 \leq j \neq k \leq 3$$

$$\forall\ 1 \leq \ell \leq 3$$

Mais de même, si $\varepsilon(i,j,k) \neq 0$:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial v_{\ell\ell}} \left(\frac{\partial}{\partial v_{jj}} - \frac{\partial}{\partial v_{ii}}\right) \frac{\partial \theta_1}{\partial \omega_j} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial v_{\ell\ell}} \frac{\partial}{\partial \bar{T}} \frac{\partial \theta_1}{\partial \omega_j} = 0 \end{cases}$$

Il en découle

$$\frac{\partial^3 \theta_1}{\partial v_{\ell\ell} \partial v_{mm} \partial \omega_n} = 0 \qquad \forall\ 1 \leq \ell,m,n \leq 3 \qquad (5.16)$$

Puis, si $i \neq j$, d'après (4.16) et (5.16) :

$$\frac{\partial \ell}{\partial v_{\ell\ell}} \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \varepsilon_i \partial \omega_j} = 0 \qquad (5.17)$$

D'après (5.16), (4.8), (4.15). (4.16), on a, si $j \neq k$:

$$\frac{\partial^3 \theta_1}{\partial \varepsilon_j^2 \partial \omega_k} = \frac{\partial^3 \theta_1}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_k \partial \omega_k} = \frac{\partial^3 \theta_1}{\partial \varepsilon_k^2 \partial \omega_k} = 0 \qquad (5.18)$$

Et, d'après (4.16) et (4.2), si $\varepsilon(i,j,k) \neq 0$:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial v_{ii}} - \frac{\partial}{\partial v_{kk}}\right)\frac{\partial^2\theta_1}{\partial\varepsilon_i\partial\omega_i} = 2\,\frac{\partial^3\theta_1}{\partial\varepsilon_i\partial\varepsilon_j\partial\omega_k} \\ \left(\frac{\partial}{\partial v_{ii}} - \frac{\partial}{\partial v_{jj}}\right)\frac{\partial^2\theta_1}{\partial\varepsilon_i\partial\omega_i} = 2\,\frac{\partial^2\theta_1}{\partial\varepsilon_i\partial\varepsilon_k\partial\omega_j} \\ \frac{\partial}{\partial T}\,\frac{\partial^2\theta_1}{\partial\varepsilon_i\partial\omega_i} = 0 \end{cases}$$

Ainsi :

$$3\,\frac{\partial^3\theta_1}{\partial\varepsilon_i\partial\omega_i\partial v_{ii}} = 2\,\frac{\partial^3\theta_1}{\partial\varepsilon_i\partial\varepsilon_j\partial\omega_k} + 2\,\frac{\partial^3\theta_1}{\partial\varepsilon_i\partial\varepsilon_k\partial\omega_j}$$

Et d'après (4.15) :

$$2\,\frac{\partial^3\theta_1}{\partial\varepsilon_j\partial\varepsilon_k\partial\omega_i} + \frac{\partial^2\theta_1}{\partial\varepsilon_i\partial\varepsilon_j\partial\omega_k} + \frac{\partial^2\theta_1}{\partial\varepsilon_i\partial\varepsilon_k\partial\omega_j} = 0 \qquad \text{si } \varepsilon(i,j,k) \neq 0.$$

Comme la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible :

$$\frac{\partial^3\theta_1}{\partial\varepsilon_j\partial\varepsilon_k\partial\omega_i} = 0 \qquad \text{si } \varepsilon(i,j,k) \neq 0 \qquad (5.19)$$

Et :

$$\frac{\partial}{\partial v_{\ell\ell}}\,\frac{\partial^2\theta_1}{\partial\varepsilon_i\partial\omega_i} = 0 \qquad \forall\ 1 \leq i,\ell \leq 3 \qquad (5.20)$$

C'est-à-dire, avec (5.17) et (5.18) :

$$\frac{\partial^3\theta_1}{\partial v_{\ell\ell}\partial\varepsilon_m\partial\omega_n} = 0 \qquad \forall\ 1 \leq \ell,m,n \leq 3 \qquad (5.21)$$

$$\frac{\partial^3\theta_1}{\partial\varepsilon_\ell\partial\varepsilon_m\partial\omega_n} = 0 \qquad \forall\ 1 \leq \ell,m,n \leq 3 \qquad (5.22)$$

On a donc montré :

Lemme 5.3.- Pour tout $1 \leq i \leq 3$, $\frac{\partial \theta_1}{\partial \omega_i}$ est affine par rapport aux variables ε_ℓ, $v_{\ell\ell}$, $1 \leq \ell \leq 3$. □

La partie homogène de degré deux par rapport à ε_ℓ, $v_{\ell\ell}$, $1 \leq \ell \leq 3$, de θ_1, est donc indépendante de $\vec{\omega}$. D'après (4.2), (4.8), (4.11) et (4.15), on a les relations, si $\varepsilon(i,j,k) \neq 0$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\theta_1}{\partial v_{ii}^2} = \dfrac{4}{9}\left(2\dfrac{\partial^2\theta_1}{\partial\varepsilon_j^2} + 2\dfrac{\partial^2\theta_1}{\partial\varepsilon_k^2} - \dfrac{\partial^2\theta_1}{\partial\varepsilon_i^2}\right) \\ \dfrac{\partial^2\theta_1}{\partial v_{ii}\partial v_{jj}} = \dfrac{2}{9}\left(\dfrac{\partial^2\theta_1}{\partial\varepsilon_i^2} + \dfrac{\partial^2\theta_1}{\partial\varepsilon_j^2} - 5\dfrac{\partial^2\theta_1}{\partial\varepsilon_k^2}\right) \\ \dfrac{\partial^2\theta_1}{\partial\varepsilon_i\partial v_{ii}} = -\dfrac{4}{3}\dfrac{\partial^2\theta_1}{\partial\varepsilon_j\partial\varepsilon_k} \\ \dfrac{\partial^2\theta_1}{\partial\varepsilon_i\partial v_{jj}} = \dfrac{2}{3}\dfrac{\partial^2\theta_1}{\partial\varepsilon_j\partial\varepsilon_k} \end{cases}$$

Cette composante homogène est donc une combinaison linéaire, dont les coefficients sont des fonctions de u, des termes :

$$\begin{cases} \varepsilon_j\varepsilon_k - 2\,\varepsilon_i v_{ii}^D \\ \varepsilon_i^2 - 4\,v_{jj}^D\,v_{kk}^D \end{cases} \qquad \varepsilon(i,j,k) \neq 0$$

Cependant, lorsque $\varepsilon(i,j,k) = 1$

$$\varepsilon_j\varepsilon_k - 2\,\varepsilon_i\,v_{ii}^D = 4\,\hat{v}_{jk}^D - \omega_j\omega_k$$

$$\varepsilon_i^2 - 4\,v_{jj}^D\,v_{kk}^D = 4\,\hat{v}_{ii}^D + \omega_i^2 .$$

D'autre part, $\forall\ 1 \leq \ell,m \leq 3$, la fonction $\hat{v}_{\ell,m}$ est un invariant trivial, donc vérifie (2.8) et (2.9); On en déduit le :

Lemme 5.4.- Il existe des fonctions ρ_{ij}, ne dépendant que de u telles que :

$$\theta_1(u,v) = \sum_{i,j} \rho_{ij}(u)\ \hat{v}^D_{ij} + \theta_2(u,v)$$

où - $\theta_2(u,v)$ vérifie le système ($\mathcal{S}$)

- $\theta_2(u,v)$ est affine par rapport aux variables ε_ℓ et $v_{\ell\ell}$, $1 \le \ell \le 3$. □

Ecrivons alors :

$$\theta_2(u,v) = \sum_i \sigma_i(u,\omega)\ v_{ii} + \sum_i \tau_i(u,\omega)\ \varepsilon_i + \theta_3(u,\omega)$$

D'après (4.2), (4.12) et (4.16), nous avons :

$$\begin{cases} \sum_\ell \sigma_\ell = 0 & (5.23) \\ \sum_\ell \dfrac{\partial \tau_\ell}{\partial \omega_\ell} = 0 & (5.24) \\ 2\ \dfrac{\partial \tau_j}{\partial \omega_k} = \dfrac{\partial}{\partial \omega_i}(\sigma_i - \sigma_j) \qquad \text{si } \varepsilon(i,j,k) \neq 0 & (5.25) \end{cases}$$

D'autre part, soit $\phi_2 = \phi_1 - \sum_{i,j} \beta_{ij}\ \hat{v}_{ij}$. La fonction ϕ_2 vérifie (2.8). Si $\varepsilon(i,j,k) \neq 0$, les coefficients de $w_{iik}\ w_{jjk}$, de $w_{iik}\ w_{jji}$ et de $w_{iij}\ w_{jji}$ dans (2.8) sont nuls. C'est-à-dire

$$\frac{\partial^3 \phi_2}{\partial \varepsilon_k \partial v_{ik} \partial v_{jk}}(v^D) = \frac{\partial^3 \phi_2}{\partial \varepsilon_k \partial v_{ik} \partial v_{ji}}(v^D) = \frac{\partial^3 \phi_2}{\partial \varepsilon_k \partial v_{ij} \partial v_{ji}}(v^D) = 0$$

Ce qui devient :

$$\frac{\partial^2 \tau_k}{\partial \omega_i \partial \omega_j} = \frac{\partial^2 \tau_k}{\partial \omega_k \partial \omega_j} = \frac{\partial^2 \tau_k}{\partial \omega_k^2} = 0$$

C'est-à-dire que τ_k est affine par rapport à $\vec{\omega}$. Ecrivons :

$$\tau_k(u,\omega) = \sum_\ell a_{k\ell}(u)\ \omega_\ell + b_k(u)$$

On a :

$$\begin{cases} \sum_k a_{kk} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \omega_i}(\sigma_i - \sigma_k) = 2\, a_{jk} \qquad \text{si } \varepsilon(i,j,k) \neq 0 \end{cases} \tag{5.26}$$

Avec (5.23); on en déduit, si $\varepsilon(i,j,k) \neq 0$:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_i}{\partial \omega_i} = \frac{2}{3}(a_{jk} + a_{kj}) \\ \frac{\partial \sigma_j}{\partial \omega_i} = \frac{2}{3}(a_{jk} - 2\, a_{kj}) \end{cases}$$

Ainsi, σ_n est également affine par rapport à $\vec{\omega}$. Et on a :

$$\sum_i \sigma_i\, v_{ii} + \sum_i \tau_i\, \varepsilon_i = \sum_{\varepsilon(i,j,k)\neq 0} a_{jk}(u)(\omega_k\, \varepsilon_j - 2\, \omega_i\, v^D_{kk}) + \sum_{k=1}^{3} a_{kk}(u)\, \varepsilon_k\, \omega_k + \sum_{k=1}^{3} (b_k(u)\, \varepsilon_k + d_k(u)\, v_{kk})$$

Cependant, si $\varepsilon(i,j,k) \neq 0$:

$$\omega_k\, \varepsilon_j - 2\, \omega_i\, v^D_{kk} = \varepsilon(i,k,j)(2 \sum_{\ell=1}^{3} v_{k\ell}\, v_{j\ell} + 2\, \hat{v}^D_{jk} + \omega_j\, \omega_k) \tag{5.27}$$

D'autre part, soit $c_k = \frac{1}{3}(a_{ii} - a_{jj})$, lorsque $\varepsilon(i,j,k) = 1$. Alors, grâce à (5.26) :

$$\sum_{k=1}^{3} a_{kk}(u)\, \varepsilon_k\, \omega_k = \sum_{k=1}^{3} c_k(\omega_k^2 - 2\, \hat{v}^D_{kk} + 2 \sum_{\ell=1}^{3} (v^D_{k\ell})^2)$$

Et de plus :

$$\sum_{k=1}^{3} c_k = 0 \tag{5.28}$$

Finalement, nous avons obtenu :

Lemme 5.5.- Il existe des fonctions $\beta_{ij}(u)$, $\gamma_{ij}(u)$, $1 \leq i,j \leq 3$, et des fonctions $\delta_{ij}(u)$, $1 \leq i \leq j \leq 3$, telles que :

i) $\sum_i \delta_{ii}(u) = 0$

ii) $\theta(u,v) = \alpha(u)\ \det v^D + \sum_{i,j} \beta_{ij}(u)\ \hat{v}^D_{ij} + \sum_{i,j} \gamma_{ij}(u)\ v^D_{ij}$

$$+ \sum_{i\le j} \delta_{ij}(u)\Big(\sum_{\ell=1}^{3} v^D_{i\ell}\, v^D_{j\ell}\Big) + \theta_4(u,\omega) + \eta(u)$$

iii) pour tout $u \in \mathbb{R}^3$:

$$\theta_4(u,\omega) = O(|\vec{\omega}|^2) \quad \text{quand} \quad |\vec{\omega}| \to 0 \qquad \square$$

Nous avons donc :

$$\phi(u,v) = \alpha(u)\ \det v + \sum_{i,j} \beta_{ij}(u)\ \hat{v}_{ij} + \sum_{i,j} \gamma_{ij}(u)\ v_{ij}$$

$$+ \sum_{i\le j} \delta_{ij}(u)\Big(\sum_{\ell=1}^{3} v_{i\ell}\, v_{j\ell}\Big) + \theta_4(u,\omega) + \mu(u,v)$$

où :

$$(T = 0) \Longrightarrow (\mu(u,v) = \eta(u)) \tag{5.29}$$

Posons :

$$\psi(u,v) = \sum_{i\le j} \delta_{ij}(u)\Big(\sum_{\ell=1}^{3} v_{i\ell}\, v_{j\ell}\Big) + \theta_4(u,\omega) + \mu(u,v)$$

On vérifie immédiatement que $M[\phi - \psi]$ obéit aux conclusions de la proposition 3.1. Comme la proposition 3.1 s'applique à $M[\phi]$, on en déduit : $M[\psi]$ est une somme de sous-déterminants de la matrice v, et d'une fonction s'annulant sur $H = \mathrm{Ker}\ \mathrm{Tr}$.

Soient $\sum_{i\le j} \xi_{ij}(u)\ \omega_i\ \omega_j$ la partie quadratique de θ_4, et $\ell(u,v)T$ celle de $\mu(u,v)$. On en déduit qu'il existe une fonction a(u), et une forme quadratique en v, q(u,v), telles que :

$$M\Big[\sum_{i\le j} \delta_{ij}(u)\Big(\sum_{\ell=1}^{3} v_{i\ell}\, v_{j\ell}\Big) + \sum_{i\le j} \xi_{ij}(u)\ \omega_i\ \omega_j + T\ell(u,v)\Big]$$

$$= a(u)\ \det v + Tq(u,v) \tag{5.30}$$

En identifiant les coefficients dans l'égalité ci-dessus, nous obtenons, si $\varepsilon(i,j,k) \neq 0$:

- pour $v_{ij}^2 v_{jk}$: $\xi_{jk} = 0$ (5.31)

- pour $v_{ij}^2 v_{jk}$: $\delta_{ij} - \xi_{ij} = 0$ (5.32)

- pour $v_{jk} v_{ki} v_{ji}$: $\delta_{ii} + \xi_{kk} = 0$ (5.33)

De (5.33), on tire :

$$\delta_{ii} = \delta_{jj} \quad \forall\, i \neq j$$

Or (lemme 5.5) : $\sum_{i=1}^{3} \delta_{ii} = 0$
d'où:

$$\delta_{ii} = 0 \qquad 1 \leq i \leq 3$$

et

$$\xi_{kk} = 0 \qquad 1 \leq k \leq 3$$

Enfin, $M[T\ell(u,v)] = TM[\ell(u,v)] + \ell(u,v)(T^2 - 2\,\phi_2(v))$ où $\phi_2(v) = \sum_{i=1}^{3} \hat{v}_{ii}$ est le second invariant algébrique de la matrice v. Ainsi :

$$-2\,\ell(u,v)\,\phi_2(v) = a(u)\,\det v + T\,q_1(u,v)$$

On en déduit $a(u) = 0$, $T \mid \ell$. La fonction T est donc trivialement un invariant. Si $\mu_1(u,v) = \mu - T\ell - \eta$, il reste :

$$\begin{cases} M[\theta_4(u,\omega) + \mu_1(u,v)] = J(u,v) \\ (T = 0) \Longrightarrow (J(u,v) = 0) \\ \forall\, u \in \mathbb{R}^3, \;\begin{cases} \theta_4(u,\omega) = 0(|\vec{\omega}|^3) & \text{quand } |\vec{\omega}| \to 0 \\ \mu_1(u,v) = 0(|v|^3) & \text{quand } |v| \to 0 \end{cases} \end{cases}$$

Ecrivons $\mu_1 = T\,\mu_2(u,v)$. Alors :

$$M[\mu_1] = M[T\,\mu_2] = TM[\mu_2] + (T^2 - 2\,\phi_2)\,\mu_2$$

D'autre part,

$$M[\theta_4] = -\frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial \theta_4}{\partial \omega_i} (\omega_k \varepsilon_j + \omega_j \varepsilon_k + 2 \omega_i v_{ii} - 2 \omega_i T)$$

où la sommation s'entend avec $\varepsilon(i,j,k) = 1$. Ainsi lorsque $T = 0$ et $\phi_2 = 0$:

$$\sum_i \frac{\partial \theta_4}{\partial \omega_i} (\omega_k \varepsilon_j + \omega_j \varepsilon_k + 2 \omega_i v_{ii}) = 0 \qquad (5.34)$$

Fixons $\vec{\varepsilon}$ tel que $|\vec{\varepsilon}| < |\vec{\omega}|$, et $t = \frac{1}{4}(|\vec{\omega}|^2 - |\vec{\varepsilon}|^2)$. Si les nombres réels v_{ii} vérifient :

$$\begin{cases} \sum_i v_{ii} = 0 \\ \\ v_{11} v_{12} + v_{22} v_{33} + v_{33} v_{11} = -t \end{cases}$$

Alors, on a $T = 0$, $\phi_2 = 0$, donc (5.34).

Par exemple, si $\varepsilon(i,j,k) \neq 0$, nous prenons

$$v_{ii} = 0 \qquad v_{jj} = \sqrt{t} \qquad v_{kk} = -\sqrt{t}$$

Et en permutant le choix de i,j,k, nous obtenons :

$$\begin{cases} \text{Pour } |\vec{\varepsilon}| < |\vec{\omega}| \\ \\ \sum_i \frac{\partial \theta_4}{\partial \omega_i} (\omega_k \varepsilon_j + \omega_j \varepsilon_k) = 0 \\ \\ \frac{\partial \theta_4}{\partial \omega_\ell} \omega_\ell = \frac{\partial \theta_4}{\partial \omega_m} \omega_m \qquad 1 \leq \ell, m \leq 3 \end{cases}$$

On en déduit, lorsque $|\vec{\omega}| > 0$, et par continuité pour tout $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} \omega_j \frac{\partial \theta_4}{\partial \omega_i} + \omega_i \frac{\partial \theta_4}{\partial \omega_j} = 0 \\ \\ \omega_i \frac{\partial \theta_4}{\partial \omega_i} = \omega_j \frac{\partial \theta_4}{\partial \omega_j} \end{cases} \qquad \text{si } i \neq j \qquad (5.35)$$

La résolution de ce système donne $(\omega_i^2 + \omega_j^2) \frac{\partial \theta_4}{\partial \omega_i} = 0$, et finalement θ_4 ne dépend que de u. Mais, vu le Lemme 5.5, nous avons $\theta_4 = 0$.

Il reste :

$$- 2 \phi_2 \mu_2 = 0 \qquad \text{lorsque } T = 0$$

Or l'ensemble des matrices v telles que $T = 0$ et $\phi_2 \neq 0$ est dense dans l'ensemble des matrices de trace nulle. Ainsi :

$$\mu_2 = 0 \qquad \text{lorsque } T = 0$$

On en déduit :

$$(T = 0) \Longrightarrow \begin{cases} \mu(u,v) = \eta(u) \\ \\ \frac{\partial \mu}{\partial T}(u,0) = 0 \end{cases}$$

Et :

$$\phi(u,v) = \alpha(u) \det v + \sum_{i,j} \beta_{ij}(u) \hat{v}_{ij} + \sum_{i,j} \gamma_{ij}(u) v_{ij} + \mu(u,v)$$

c'est-à-dire la proposition 5.1.

VI.- DEPENDANCE DE ϕ PAR RAPPORT A u

Ce paragraphe termine la démonstration du théorème. Nous résolvons (2.6) et (2.7). Si $\Psi \in \mathcal{C}^3 (\mathbb{R}^3 \times M_3(\mathbb{R}))$, nous posons :

$$L[\Psi] = - \sum_{i,j} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u_i \partial u_j} v_{ij} + \sum_{i,j,k,\ell} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial v_{ij} \partial u_k \partial u_\ell} v_{jk} v_{i\ell}$$

$$N[\Psi] = \sum_{i,j,k} \left(- \frac{\partial^2 \Psi}{\partial v_{jk} \partial u_i} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial v_{ij} \partial u_k} \right) w_{ijk}$$

$$+ \sum_{i,j,k,\ell,m} \left[\left(\frac{\partial}{\partial v_{ij}} + \frac{\partial}{\partial v_{ji}} \right) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial v_{\ell m} \partial u_k} \right] v_{jk} w_{i\ell m}$$

Si ϕ est un invariant du premier ordre de l'équation d'Euler dans Ω ($\Omega \in \mathbb{R}^3$), nous avons :

$$L[\phi] = 0 \qquad N[\phi] = 0 \qquad \text{lorsque } (\mathcal{E}) \text{ a lieu.}$$

En écrivant la formule de Taylor à l'ordre 2 par rapport à la variable v, nous avons :

$$\begin{cases} \phi = \phi^0 + \phi^1 + \phi^2 + \bar{\phi} \\ \phi^k(u,v) \text{ est une k-forme de v} \\ \forall\, u \in \mathbb{R}^3, \quad \bar{\phi}(u,v) = 0(v^3) \quad \text{quand } v \to 0 \end{cases}$$

D'après la proposition 5.1 :

$$\begin{cases} \phi^0(u) = \mu(u,0) \\ \phi^1(u) = \sum_{i,j} \gamma_{ij}(u)\, v_{ij} \\ \phi^2(u) = \sum_{i,j} \beta_{ij}(u)\, \widehat{v_{ij}} + \eta(u)\, T^2 \\ \bar{\phi}(u) = T^2\, \bar{\mu}(u,v) + \alpha(u)\, \det v \end{cases}$$

On vérifie facilement que, lorsque ($\mathcal{C}$) a lieu :

$$L[\overline{\phi}] = 0 \qquad N[\overline{\phi}] = 0.$$

On en déduit :

$$\begin{cases} \text{lorsque } (\mathcal{C}) \text{ a lieu} \\ L[\phi^0 + \phi^1 + \phi^2] = N[\phi^0 + \phi^1 + \phi^2] = 0 \end{cases}$$

Cependant, si Ψ est, par rapport à v, un polynôme homogène de degré k, $L[\Psi]$ et $N[\Psi]$ sont aussi des polynômes homogènes en v, de degrés respectivement k+1 et k-1 ($-\infty$ si $k = 0$). On en déduit :

$$\begin{cases} \text{lorsque } (\mathcal{C}) \text{ a lieu} \\ L[\phi^k] = 0 \qquad N[\phi^k] = 0 \qquad 0 \leq k \leq 2 \end{cases}$$

Nous traitons successivement chacun des trois cas.

A) Cas $k = 0$

$$\phi^0 = \phi^0(u)$$

L'équation $N[\phi^0] = 0$ est triviale. Il reste :

$$\sum_{i,j} \frac{\partial^2 \phi^0}{\partial u_i \partial u_j} v_{ij} = 0 \qquad \text{lorsque } T = 0$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \phi^0}{\partial u_i \partial u_j} = 0 & \text{si } i \neq j \\ \dfrac{\partial^2 \phi^0}{\partial u_i^2} - \dfrac{\partial^2 \phi^0}{\partial u_j^2} = 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

On en déduit immédiatement :

Lemme 6.1.- Il existe $E \in \mathbb{R}$, $\vec{\Omega} \in \mathbb{R}^3$, $C \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\phi_o(u) = \frac{1}{2} E\ |\vec{u}|^2 + \vec{\Omega}.\ \vec{u} + c \qquad \square$$

B) Cas k = 1

$$\phi^1 = \sum_{i,j} \gamma_{ij}(u)\ v_{ij}$$

Ecrivons (2.7). Nous avons :

$$\sum_{i,j,k} \left(\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial u_k} - \frac{\partial \gamma_{jk}}{\partial u_i}\right) w_{ijk} = 0 \qquad \text{lorsque } (\mathscr{C}) \text{ a lieu.}$$

Il existe donc des fonctions $\chi_a(u)$, $1 \le a \le 3$, telles que, lorsque $w_{ijk} = w_{jik}$ $1 \le i,j,k \le 3$, on ait :

$$\sum_{i,j,k} \left(\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial u_k} - \frac{\partial \gamma_{jk}}{\partial u_i}\right) w_{ijk} = \sum_a \chi_a \left(\sum_\ell w_{a\ell\ell}\right)$$

On en déduit, si $\varepsilon(i,j,k) \neq 0$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \gamma_{ij}}{\partial u_k} - \dfrac{\partial \gamma_{jk}}{\partial u_i} + \dfrac{\partial \gamma_{ji}}{\partial u_k} - \dfrac{\partial \gamma_{ik}}{\partial u_j} = 0 \\ \dfrac{\partial \gamma_{ii}}{\partial u_k} - \dfrac{\partial \gamma_{ik}}{\partial u_i} = 0 \\ 0 = \chi_i \\ \dfrac{\partial \gamma_{ij}}{\partial u_j} - \dfrac{\partial \gamma_{jj}}{\partial u_i} = \chi_i \end{cases}$$

En éliminant $\vec{\chi}$, ce système se réduit aux deux premières équations. Si $1 \le i,j,k \le 3$, nous notons :

$$A(i,j,k) = \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial u_k} - \frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial u_j}$$

Le système se réduit à :

$$\begin{cases} A(i,j,k) + A(j,i,k) = 0 \quad \text{si } \varepsilon(i,j,k) \neq 0 \\ A(i,i,k) = 0 \end{cases}$$

On en déduit immédiatement l'existence d'une fonction A(u), telle que :

$$A(i,j,k) = \varepsilon(i,j,k)\, A(u) \qquad \forall\ 1 \le i,j,k \le 3$$

Cependant, on a :

$$\frac{\partial}{\partial u_i}\ A(i,j,k) = \frac{\partial}{\partial u_k}\ A(i,j,i) - \frac{\partial}{\partial u_j}\ A(i,k,i) = 0$$

Ainsi A(u) est en fait une constante, $A \in \mathbb{R}$. Définissons alors :

$$\rho_{ij} = \gamma_{ij} - \frac{1}{2} \sum_{\ell} \varepsilon(i,j,\ell)\, Au_{\ell}$$

Nous avons, si $\varepsilon(i,j,k) = 1$:

$$\rho_{ii} = \gamma_{ii}, \quad \rho_{ij} = \gamma_{ij} - \frac{1}{2} A\, u_k, \quad \rho_{ji} = \gamma_{ij} + \frac{1}{2} A\, u_k$$

Alors :

$$\frac{\partial \rho_{ij}}{\partial u_k} - \frac{\partial \rho_{ik}}{\partial u_j} = 0 \qquad \forall\ 1 \le i,j,k \le 3$$

Il existe donc, pour tout $1 \le i \le 3$, une fonction $F_i(u)$, telle que $\rho_{ij} = \dfrac{\partial F_i}{\partial u_j}$, $1 \le j \le 3$. Ainsi :

<u>Lemme 6.2</u> .- Il existe une constante $A \in \mathbb{R}$, et un champ $\vec{F}(u)$ tels que :

$$\phi^1(u,v) = \frac{1}{2} A\, \vec{u} \wedge \vec{\omega} + \sum_{\ell,m} \frac{\partial F_\ell}{\partial u_m}\ v_{\ell m} \qquad \square$$

C) Cas k = 2

$$\phi^2 = \sum_{i,j} \beta_{ij}(u)\ \hat{v}_{ij} + \eta(u)\ T^2$$

Nous exprimons (2.7). Définissons d'abord, si $\varepsilon(i,j,k) \neq 0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_i(v,w) = {} & w_{jji}v_{kk} + w_{kki}v_{jj} - w_{kkj}v_{ji} - w_{jjk}v_{ki} \\ & - w_{ijj}v_{kk} + w_{kjj}v_{ki} - w_{ikk}v_{jj} + w_{jkk}v_{ji} \\ & + w_{ikj}v_{jk} + w_{ijk}v_{kj} - w_{jki}(v_{jk} + v_{kj}) \end{aligned}$$

Alors :

$$N[\phi^2] = \sum_{i,j} \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial u_i} \mathcal{N}_j$$

Ainsi, lorsque ($\mathcal{C}$) a lieu :

$$\sum_{i,j} \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial u_i} \mathcal{N}_j = 0$$

Le coefficient de $w_{kkj} v_{ji}$, si $\varepsilon(i,j,k) \neq 0$, est alors nul. On en déduit avec $\vec{\beta}_i(u) = (\beta_{1i}, \beta_{2i}, \beta_{3i})$

$$\operatorname{div}_u \vec{\beta}_i = 0 \qquad 1 \leq i \leq 3$$

Il existe donc des potentiels vecteurs $\vec{V}^i(u)$:

$$\vec{\beta}_i(u) = \operatorname{rot}_u \vec{V}^i \qquad 1 \leq i \leq 3$$

Posons :

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} F_k^{ij}(u) = \varepsilon(i,j,k)\, V_j^j \\ F_i^{ji}(u) = \varepsilon(i,j,k)\, V_i^k \\ F_j^{ii}(u) = \varepsilon(i,j,k)\, V_i^k \end{array}\right\} & \text{si } (i,j,k) \neq 0 \\ F_\ell^{\ell m}(u) = 0 \qquad 1 \leq \ell,m \leq 3 \end{cases}$$

On a alors :

Lemme 6.3.- Il existe des fonctions $F_\ell^{mn}(u)$, $1 \leq \ell,m,n \leq 3$ telles que

$$\phi^2(u,v) = \sum_{k,\ell,m,n} \frac{\partial F_\ell^{mn}}{\partial u_k} v_{mn} v_{\ell k} + \eta(u) T^2$$

et :

$$F_\ell^{mn}(u) + F_m^{\ell n}(u) = 0 \qquad 1 \leq \ell,m,n \leq 3 \qquad \square$$

Ceci achève de prouver le théorème. $\square$

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.M. Ball : Constitutive inequalities and existence theorems in nonlinear elastostatics. Nonlinear analysis and Mechanics
Herriot-Watt Symposium (Edinburgh 1976), Vol.1, pp. 187-241.

[2] D.G. Ebin and J. Marsden : Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid
Annals of Maths 92 (1970), pp. 102-163.

[3] V.I. Judovič : Non-stationary flows of an ideal incompressible fluid
Ž. Vyčisl. Math. Soc. 13 (1912), pp.109-132.

[4] T. Kato : Non-stationary flows of viscous and ideal fluids in $\mathbb{R}^3$
J. Functional Analysis, 9 (1972), pp.296-305.

[5] T. Kato : On classical solutions of two-dimensional non-stationary Euler equations
Arch. Rat. Mech. Anal. 25 (1967), pp.188-200.

[6] D. Serre : Les invariants du premier ordre de l'équation d'Euler en dimension 3.
Comptes Rendus Acad. Sc. Paris 289 (1979), Série A, pp. 267-270.

[7] J. Serrin : Mathematical principles of classical fluid dynamics
Encyclopedia of Physics 13 (1959), Springer-Verlag.

[8] R. Temam : On the Euler equations of incompressible fluids
J. Funct. Analysis 19 (1975), pp.1-12.

[9] W. Wolibner : Un théorème sur l'existence du mouvement plan d'un fluide parfait, homogène, incompressible, pendant un temps infiniment long
Math. Z. 37 (1933), pp.698-726.

C. R. Acad. Sc. Paris, t. 293 (16 novembre 1981) Série I – 505

ANALYSE MATHÉMATIQUE. – *Les invariants locaux de l'équation de Korteweg de Vries*. Note (*) de **Denis Serre,** présentée par Jacques-Louis Lions.

Nous montrons que tout invariant de l'équation KdV, $u_t+u_{xxx}+uu_x=0$, de la forme :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi\left(u,\frac{\partial u}{\partial x},\ldots,\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right)dx,\qquad n\in\mathbb{N},$$

est une combinaison linéaire des $n+2$ invariants polynomiaux obtenus par Gardner-Green-Kruskal-Miura [1], dont les premiers sont u, $(1/2)u^2$, $(1/2)u_x^2-(1/6)u^3$, ... La seule hypothèse faite est que $\Phi\in\mathscr{C}^{n+3}(\mathbb{R}^{n+1},\mathbb{R})$ et $\varphi(0)=0$.

Il n'existe donc pas d'invariant de l'équation de KdV, autres que ceux déjà connus.

We establish in this Note that every invariant of the Korteweg de Vries equation $u_t+u_{xxx}+uu_x=0$, of the form:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi\left(u,\frac{\partial u}{\partial u},\ldots,\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right)dn,\qquad n\in\mathbb{N},$$

is a linear combination of the $n+2$ polynomial invariants obtained by Gardner. Green-Kruskal-Miura [1], the first of which being u, $(1/2)u^2$, $(1/2)u_x^2-(1/6)u^3$, ... The only assumption made is that $\Phi\in\mathscr{C}^{n+3}(\mathbf{R}^{n+1},\mathbf{R})$ and $\Phi(0)=0$. Therefore there is no invariant of the Korteweg de Vries equation, besides those which are already known

INTRODUCTION. – L'équation de Korteweg de Vries, modélisant l'évolution d'une onde longitudinale dans un canal peu profond de longueur infinie [2], est :

$$u_t+u_{xxx}+uu_x=0\qquad (t,x)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}.$$

Il est connu [3] que pour une condition initiale $u_0(x,0)$, $u_0\in H^s(\mathbb{R})$, $s\geqq 2$, il existe une solution unique dans $\mathscr{C}(\mathbb{R}^+,H^s(\mathbb{R}))$; d'autre part, si $u_0\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$, [6], alors la solution u est dans $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^+,\mathscr{S}(\mathbb{R}))$. Récemment, les théorèmes d'existence se sont étendus aux cas où u_0 est dans $L^2(\mathbb{R},d\mu)$ où μ est une mesure convenable [4], puis $u_0\in L^2(\mathbb{R},dx)$ [5]. Dans ce qui suit, seule l'existence de solutions régulières nous sera utile.

Le deuxième aspect de l'équation KdV qui intéresse le mathématicien est l'existence d'un grand nombre d'invariants. On peut les classer principalement en deux groupes :

1° Les invariants liés à l'opérateur de Schrödinger $-(\partial^2/\partial x^2)+(1/4)u$ sur $L^2(\mathbb{R})$.

Pour tout t, cet opérateur reste unitairement équivalent à l'opérateur initial $-(\partial^2/\partial x^2)+(1/4)u_0$. Il en résulte que les valeurs propres de l'opérateur $-(\partial^2/\partial x^2)+(1/4)u$ restent constantes au cours du temps.

L'étude de la variation des éléments spectraux de cet opérateur au cours du temps a permis de résoudre l'équation KdV par la méthode de diffusion inverse.

2° Les invariants à densité χ :

$$\chi(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi\left(u,\frac{\partial u}{\partial x},\ldots,\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right)dx.$$

La quantité χ étant correctement définie si $\Phi(0)=0$, $\Phi\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^{n+1},\mathbb{R})$ et $u\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$, il revient au même de dire que χ est un invariant de l'équation KdV que de dire qu'il existe une densité $\Psi\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^{n+3},\mathbb{R})$ telle que, pour toute solution KdV, on ait :

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi\left(u,\frac{\partial u}{\partial x},\ldots,\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\Psi\left(u,\frac{\partial u}{\partial x},\ldots,\frac{\partial^{n+2}u}{\partial x^{n+2}}\right)=0.$$

Ce point de vue a été étudié par Gardner-Green-Kruskal-Miura [1] qui ont découvert une liste de densité polynomiales $T_n(u_0,\ldots,u_n)$, $n\in\{-1\}\cup\mathbb{N}$, telles que :

$$\chi_n(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}T_n\left(u,\ldots,\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right)dx$$

soit un invariant de l'équation KdV. Ces polynomes ont les propriétés suivantes :

(i) $T_n=(1/2)u_n^2+S_n(u_0, \ldots, u_{n-1})$ si $n\geqq 0$;

(ii) $\partial T_n/\partial u_0=c_n T_{n-1}$, si $n\geqq 0$.

L'utilisation de ces polynomes et de théorèmes d'interpolation entre les espaces de Sobolev permet de montrer qu'à une condition initiale $u_0\in H^m(\mathbb{R})$, $m\geqq 1$, correspond une solution $u\in L^2(0, T, H^m(\mathbb{R}))$.

On a enfin $T_{-1}=u_0$, $T_0=(1/2)u_0^2$, $T_1=(1/2)u_1^2-(1/6)u_0^3$, etc.

Le résultat que nous démontrons ici complète l'étude des invariants à densité de l'équation KdV :

THÉORÈME. – *Soit* $\Phi\in\mathscr{C}^{n+3}(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R})$, $\Phi=\Phi(u_0, \ldots, u_n)$, $\Phi(0)=0$, *tel que pour toute solution* $u=u(x, t)\in\mathscr{C}^\infty(0, T; \mathscr{S}(\mathbb{R}))$, *la quantité :*

$$\chi(u)(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right)dx,$$

soit invariante dans le temps. Il existe alors des constantes ρ_k, $-1\leqq k\leqq n$, *et une fonction* $F\in\mathscr{C}^{n+4}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ *telles que :*

$$\Phi=\sum_{k=-1}^{n}\rho_k T_k+\sum_{j=u_j}^{n-1}\frac{\partial F}{\partial u_j}u_{j+1}.$$

On a alors, pour $u\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$:

$$\chi(u)=\sum_{k=-1}^{n}\rho_k\int_{-\infty}^{+\infty}T_k\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right)dx.$$

Démonstration. – Adoptons tout d'abord la notation suivante :

si $\Psi(u_0, \ldots, u_N)\in\mathscr{C}(\mathbb{R}^{N+1}, \mathbb{R})$, on note $\Psi\equiv 0$ lorsqu'il existe :

$$G(u_0, \ldots, u_{N-1})\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}), \qquad \Psi=\sum_{k=0}^{N-1}(\partial G/\partial u_k)u_{k+1}.$$

Puis on note $\Psi_1\equiv\Psi_2$ lorsque $\Psi_1-\Psi_2\equiv 0$.

Rappelons que, si $\Psi(0)=0$ et si :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi\left(u(x), \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^N u}{\partial x^N}\right)dx=0$$

pour toute fonction $u\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$, alors $\Psi\equiv 0$.

Nous procédons alors par récurrence. Nous considérons une densité $\Phi(u_0, \ldots, u_n)$, $\Phi(0)=0$, $\Phi\in\mathscr{C}^{n+3}(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R})$, qui définit un invariant :

$$\chi(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right)dx,$$

pour les solutions $u\in\mathscr{C}^\infty(0, T; \mathscr{S}(\mathbb{R}))$ de l'équation KdV. Nous supposons que le théorème est vrai jusqu'à l'ordre $n-1$; si $n=0$ nous ne supposons rien

Soit $u\in\mathscr{C}^\infty(0, T; \mathscr{S}(\mathbb{R}))$ une solution de KdV, nous avons :

$$0=-\frac{d}{dt}\chi(u(t))=-\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial\Phi}{\partial u_k}\left(u, \ldots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right)\frac{\partial^k}{\partial x^k}\frac{\partial u}{\partial t}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial\Phi}{\partial u_k}\left[\frac{\partial^{k+3}u}{\partial x^{k+3}}+\frac{1}{2}\frac{\partial^{k+1}}{\partial x^{k+1}}(u^2)\right]dx.$$

Ce qui s'écrit, avec $E(u_0, \ldots, u_{n+3}) \in \mathscr{C}^{n+2}(\mathbb{R}^{n+4}, \mathbb{R})$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E\left(u, \ldots, \frac{\partial u^{n+3}}{\partial x^{n+3}}\right) dx = 0.$$

L'équation (1) est vraie pour tout $t \in (0, T)$, et donc pour $t = 0$.

Elle est donc vérifiée pour toute condition initiale $u_0 \in \mathscr{S}(R)$, puisqu'à une telle condition initiale correspond une solution $u \in \mathscr{C}^{\infty}(0, T; \mathscr{S}(R))$. Nous avons donc :

$$E \equiv 0 \tag{2}$$

LEMME – *Il existe* $E_i(u_0, \ldots, u_n) \in \mathscr{C}^n(R^{n+1}, R)$, $i = 1, 2$, *tels que :*

$$E \equiv \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial u_n^3} u_{n+1}^3 + \frac{3}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial u_k \partial u_n^2} u_{n+1}^2 u_{k+1} + E_1 u_{n+1} + E_2$$

Démonstration du lemme – Les seuls termes de E n'entrant pas immédiatement dans le reste $E_1 u_{n+1} + E_2$ sont les termes $(\partial\Phi/\partial u_n) u_{n+3} + (\partial\Phi/\partial u_{n-1}) u_{n+2}$ Faisons quelques calculs :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_n} u_{n+3} \equiv -u_{n+2} \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_k \partial u_n} u_{k+1} \equiv -u_{n+2} u_{n+1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_n^2} - u_{n+2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_k \partial u_n} u_{k+1}$$

$$\equiv \frac{1}{2} u_{n+1}^2 \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial u_n^2 \partial u_k} u_{k+1} + u_{n+1} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial u_j \partial u_k \partial u_n} u_{k+1} u_{j+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_k \partial u_n} u_{k+2} \right\}$$

$$\equiv \frac{1}{2} u_{n+1}^3 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial u_n^3} + \frac{3}{2} u_{n+1}^2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial u_k \partial u_n^2} u_{k+1} + u_{n+1}^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_{n-1} \partial u_n} + E_3 u_{n+1},$$

où $E_3 \in \mathscr{C}^n(R^{n+1}, R)$

Puis :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_{n-1}} u_{n+2} \equiv -u_{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_k \partial u_{n-1}} u_{k+1} \equiv -u_{n+1}^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_{n-1} \partial u_n} + E_4 u_{n+1},$$

où :

$$E_4 \in \mathscr{C}^{n+1}(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R})$$

On en déduit le lemme.

Nous avons donc, puisque $E \equiv 0$:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial u_n^3} u_{n+1}^3 + \frac{3}{2} u_{n+1}^2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial u_k \partial u_n^2} u_{k+1} + E_1 u_{n+1} + E_2 \equiv 0.$$

C'est-à-dire $\mathscr{C} \equiv 0$ où $\mathscr{C}(u_0, \ldots, u_{n+1}) \in \mathscr{C}^n(\mathbb{R}^{n+2}, \mathbb{R})$.

On en déduit que $\mathscr{C}$ est affine par rapport à la variable u_{n+1}, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial^3 \Phi}{\partial u_n^3} = 0, \quad \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial u_k \partial u_n^2} u_{k+1} = 0.$$

Posons :

$$\Psi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_n^2}, \qquad \Psi \in \mathscr{C}^{n+1}(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}).$$

Nous avons :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial u_n} = 0, \qquad \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial \Psi}{\partial u_k} u_{k+1} = 0.$$

Ainsi $\Psi = \Psi(u_0, \ldots, u_{n-1})$. Et, par récurrence, on obtient $\partial \Psi / \partial u_k = 0$ pour tout $k \leqq n$.

Donc $\partial^2 \Phi / \partial u_n^2 = \Psi$ est égal à une constante $\rho_n \in \mathbb{R}$.

On a donc :

$$\Phi = \frac{1}{2} \rho_n u_n^2 + H_1(u_0, \ldots, u_{n-1}) u_n + H_2(u_0, \ldots, u_{n-1}).$$

Si $n = 0$, le théorème est démontré. Si $n \geqq 1$, on a par (i) :

$$\Phi = \rho_n T_n + H_1 u_n + H_3(u_0, \ldots, u_{n-1}).$$

Soit alors $F_n(u_0, \ldots, u_{n-1}) = \int_0^{u_{n-1}} H_1(u_0, \ldots, u_{n-2}, s)\, ds$.

On a :

$$\Phi = \rho_n T_n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial F_n}{\partial u_k} u_{k+1} + H_4(u_0, \ldots, u_{n-1}),$$

où $H_4 \in \mathscr{C}^{n+2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Soit :

$$\chi_{n-1}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} H_4\left(u, \ldots, \frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}}\right) dx = \chi(u) - \rho_n \int_{-\infty}^{+\infty} T_n\left(u, \ldots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right) dx.$$

Puisque :

$$\chi \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} T_n\left(u, \ldots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right) dx,$$

sont des invariants de l'équation KdV, χ_{n-1} est aussi un invariant de cette équation.

L'hypothèse de récurrence affirme qu'alors :

$$H_4 = \sum_{k=-1}^{n-1} \rho_k T_k + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{\partial G}{\partial u_k} u_{k+1},$$

où $G \in \mathscr{C}^{n+3}(\mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{R})$. On a donc :

$$\Phi = \sum_{k=-1}^{n} \rho_k T_k + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial F}{\partial u_k} u_{k+1},$$

avec $F = F_n + G$. On vérifie alors que, puisque $\Phi \in \mathscr{C}^{n+3}(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R})$, on a $F \in \mathscr{C}^{n+4}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

(*) Reçue le 27 juillet 1981, remise le 21 septembre 1981.

[1] Gardner-Kruskal-Muira, *J. Math. Phys.*, 9, 1968, p. 1204-1209.

[2] D. Korteweg et G. de Vries, *Philos. Mag.*, 39, 1895, p. 422-443.

[3] J. C. Saut et R. Teman, *Remarks on the Korteweg de Vries Equation*, 24, 1976, p. 78-87.

[4] T. Kato, Preprint.

[5] T. Kato, Preprint.

[6] T. Kato et M. Tsutsumi (à paraître).

Laboratoire d'Analyse numérique, Bât. 425, *Université Paris-Sud*, 91405 *Orsay*.

INVARIANTS DU PREMIER ORDRE DES SYSTEMES HYPERBOLIQUES SEMI-LINEAIRES

PLAN : O. Généralités sur les invariants.

I. Systèmes hyperboliques semi-linéaires. Résultats généraux.

II. Le cas vraiment non-linéaire.

III. Le cas linéairement dégénéré. Un exemple.

IV. Remarques sur le cas mixte.

V. La dynamique des gaz monodimensionnelle.

$$\frac{\partial}{\partial u^j} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \phi}{\partial u^i} a_{ik} = \frac{\partial}{\partial u^k} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \phi}{\partial u^i} a_{ij} \qquad (0.3)$$

Dans le cas conservatif, ce système devient :

$$[D^2\phi , Df] = 0 \qquad (0.4)$$

I. SYSTEMES HYPERBOLIQUES SEMI-LINEAIRES. RESULTATS.

Le système (0.1) est dit <u>hyperbolique</u> lorsque les valeurs propres de la matrice $A(u) = ((a_{ij}))_{i,j}$ sont réelles. Nous supposons dans cet article que le système est <u>strictement</u> hyperbolique : les valeurs propres $\lambda_k(u)$ sont distinctes. La matrice $A(u)$ est alors diagonalisable, et on note $r^k(u)$ (respectivement $\ell^k(u)$) un vecteur propre de $A(u)$ (resp. de ${}^tA(u)$) relativement à la valeur propre $\lambda_k(u)$.

Nous dirons que le système (0.1) est <u>vraiment non-linéaire</u> si $\frac{\partial \lambda k}{\partial u} \cdot r^k$ ne s'annule jamais, et qu'il est <u>linéairement dégénéré</u> si $\frac{\partial \lambda k}{\partial u} \equiv 0$ pour tout $1 \leq k \leq N$, et tout $u \in \mathbb{R}^N$.

Lorsque le système est conservatif (forme 0.2), on définit aisément la notion de solution faible, et Glimm [4] prouve, sous l'hypothèse non-linéaire, l'existence d'une telle solution pour $t \in (0, +\infty)$, pourvu que la variation totale de $u(x,0)$ soit suffisamment petite.

Inversement, le système semi-linéaire (0.1) n'a de sens que lorsque $\vec{u}$ est suffisamment régulier, par exemple $\vec{u} \in (W^{1,1}(\mathbb{R}))^N$, et Lax [5] prouve, toujours sous l'hypothèse non-linéaire, que toute solution non nulle explose au bout d'un temps

fini. Ce phénomène est lié, à notre avis, à la non-existence d'invariant d'ordre 1, résultat que nous démontrons ici.

Remarquons que le système (0.1) peut être mis sous forme conservatrice pourvu qu'on trouve une famille d'entropies $\{e_j(u) \; ; \; 1 \leq j \leq N\}$ qui soit également un changement de variables. La notion de solution forte ne dépend évidemment pas de cette mise en forme, mais la notion de solution faible dépend du choix de la famille d'entropies, par l'intermédiaire de la condition de Rankine-Hugoniot qui régit les chocs le long d'une courbe $x = x(t)$ (f_j étant le flux d'entropie e_j, $(e_j)_t + (f_j)_x = 0$) :

$$(f_j \circ u)(x(t) + 0, t) - (f_j \circ u)(x(t) - 0, t)$$

$$+ x'(t)\,(e_j \circ u\,(x(t) + 0, t) - e_j \circ u\,(x(t) - 0, t) = 0.$$

Puisque, plus l'ensemble des solutions considérées est petit, plus les invariants sont généraux, nous nous permettrons de ne considérer que le cas de solutions très régulières. Plus précisément, on sait que si $u_o \in (\mathcal{D}(\mathbb{R}))^N$, le problème de Cauchy (0.1) de condition initiale $u(x, 0) = u_o(x)$ admet une solution $u \in \mathcal{C}^\infty\,(0, \varepsilon, (\mathcal{D}(\mathbb{R}))^N)$ où $\varepsilon > 0$ dépend de u_o. Cette propriété d'existence suffira pour démontrer les théorèmes que nous avons en vue. Un invariant du premier ordre sera donc une fonction $\phi(u, v)$ telle que, pour toute solution $u \in \mathcal{C}^\infty(0, \varepsilon \; ; \; (\mathcal{D}(\mathbb{R}))^N)$, $\varepsilon > 0$, on ait $\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi\,(u(x)\,,\, u_x(x)\,)dx = 0$.

Théorème 1. *Supposons que le système (0.1) soit vraiment non-linéaire. Alors tout invariant du premier ordre* $\phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{2N})$ *est la somme* $\phi_o + \mathcal{D}\beta$ *d'une entropie* $\phi_o(u)$ *et d'un lagrangien nul* $\mathcal{D}\beta(u,v) = \frac{\partial \beta}{\partial u}(u).v$.

La terminologie <u>*Lagrangien nul*</u> *est justifiée par le fait que pour* $u \in (\mathcal{D}(\mathbb{R}))^N$ *, on a :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{D}\beta\,(u, u_x)\,dx = 0 \quad .$$

<u>*Théorème 2*</u>. *Supposons que le système (0.1) soit linéairement dégénéré. Alors :*

<u>*Si* $N \geq 3$</u> *: "En général", les invariants du premier ordre ont la forme* $\phi_o + \mathfrak{D}\beta$, *où* ϕ_o *est une entropie, et* $\mathfrak{D}\beta$ *un lagrangien nul.*

<u>*Si* $N = 2$</u> *: Les invariants du premier ordre sont les fonctions de la forme*

$$\phi_o + \mathfrak{D}\beta + \sum_{i=1}^{2} (\ell^i.v)\, h_i\,(y_i, z_i)\, q_i^o .$$

Les fonctions y_i, z_i, q_i^o *sont des solutions particulières d'équations linéaires du premier ordre, non triviales, de* u *et* $\ell^i.v$. *On a* $q_i^o\,(u, 0) = 0$. *De plus,* ϕ_o *est une entropie,* $\mathfrak{D}\beta$ *est un lagrangien nul, et* h_i *est une fonction arbitraire de deux variables réelles.*

Au paragraphe II, nous montrons que la recherche des invariants du premier ordre est équivalente à la résolution d'une identité qui est une équation différentielle contenant 2N variables et N + 1 inconnues. Le cas vraiment non-linéaire est immédiatement traité ; c'est le plus simple.

Le paragraphe III traite du cas dégénéré et démontre le Théorème 2. Le terme "en général" y est expliqué. Un exemple qui sort du cas générique est alors traité.

Au paragraphe IV, nous abordons l'étude du cas mixte : certains champs caractéristiques sont vraiment non-linéaires, tandis que d'autres sont linéairement dégénérés. Nous n'obtenons pas de classification générale des invariants, mais seulement quelques propriétés communes. Ces résultats sont appliqués à un cas simple, la dynamique des gaz monodimensionnels (paragraphe V), pour lesquels $\lambda_1 < \lambda_2 = 0 < \lambda_3 = -\lambda_1$, et $\frac{\partial \lambda_1}{\partial u} \cdot r^1 \neq 0$, $\frac{\partial \lambda_3}{\partial u} \cdot r^3 \neq 0$.

II. CAS NON-LINEAIRE.

1. Méthode générale.

Les raisonnements de cet alinéa, n'invoquant que l'hyperbolicité stricte de (0.1), sont valables dans tous les cas et seront utilisés dans les autres paragraphes.

Soit $u \in \mathcal{C}(0, \varepsilon; (\mathcal{D}(\mathbb{R}))^N)$ une solution de (0.1). Puisque ϕ est un invariant, nous avons :

$$0 = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi\,(u, u_x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial \phi}{\partial u} u_t + \frac{\partial \phi}{\partial v} u_{xt} \right) dx$$

$$= - \int_{-\infty}^{+\infty} E_1\,(u, u_x, u_{xx})\,dx \quad .$$

On a noté $E_1\,(u, v, w) = \frac{\partial \phi}{\partial u} Av + \frac{\partial \phi}{\partial v} \left((\frac{\partial A}{\partial u}.v)v + Aw \right)$. En vertu de la propriété d'existence citée au paragraphe précédent, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} E_1\,(u, u_x, u_{xx})dx$ est nulle pour tout $u \in (\mathcal{D}(\mathbb{R}))^N$: E_1 est un lagrangien nul. Il est classique qu'on peut alors écrire $E_1 = \frac{\partial \psi}{\partial u} \cdot v + \frac{\partial \psi}{\partial v} \cdot w$ où $\psi = \psi(u, v)$. Il s'ensuit que

$$\frac{\partial^2 E_1}{\partial w_i \partial v_j} = \frac{\partial^2 E_1}{\partial w_j \partial v_i} \text{ pour tous i, j, i.e. :}$$

$$\sum_{m=1}^{N} \frac{\partial^2 \phi}{\partial v_j \partial v_m} a_{mi} = \sum_{m=1}^{N} \frac{\partial^2 \phi}{\partial v_i \partial v_m} a_{mj} .$$

Et puisque les valeurs propres de A sont distinctes (hyperbolicité stricte), $D^2\phi$ et A sont simultanément diagonalisables. Ce qui signifie, si $z_k = \ell^k.v$: $\frac{\partial^2 \phi}{\partial z_i \partial z_j} = 0$ pour tous $i \neq j$. La fonction ϕ a donc la forme :

$$\phi = \phi_o(u) + \sum_{k=1}^{N} p_k (u, \ell^k.v) , \quad p_k(u, o) = 0.$$

On a alors :

$$\frac{\partial \phi}{\partial v} A u_{xx} = \sum_{k=1}^{N} p_k' \lambda_k \ell^k.u_{xx} = \Big(\sum_{k=1}^{N} \lambda_k p_k(u, \ell^k.u_x) \Big)_x$$

$$- \sum_{k=1}^{N} \Big\{ \Big(\frac{\partial \lambda_k}{\partial u} . u_x\Big) p_k + \lambda_k \frac{\partial p_k}{\partial u} . u_x + \lambda_k p_k' \Big(\frac{\partial \ell^k}{\partial u} . u_x\Big) u_x \Big\} .$$

Si bien que l'intégration par partie donne :

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} E_2(u, u_x)\,dx = 0 \qquad \forall\, u \in (\mathcal{D}(\mathbb{R}))^N , \\ E_2(u, v) = - \frac{\partial \phi_o}{\partial u} Av + \sum_{k=1}^{N} \Big\{ \Big(\frac{\partial \lambda_k}{\partial u} . v\Big) p_k - \frac{\partial p_k}{\partial u} (A - \lambda_k I) v \\ \qquad + p_k' \Big[\lambda_k \Big(\frac{\partial \ell^k}{\partial u} . v\Big) v - \Big(\frac{\partial \ell^k}{\partial u} . Av\Big) v - \ell^k \Big(\frac{\partial A}{\partial u} . v\Big) v \Big] \Big\} . \end{cases}$$

La fonction E_2 est donc un lagrangien nul, et il existe une fonction $\mathcal{H}(u)$ telle que $E_2(u,v) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} . v$.

Si nous dérivons l'équation $\ell^k Av = \lambda_k \ell^k v$ par rapport à v, nous obtenons $\lambda_k \Big(\frac{\partial \ell^k}{\partial u} . v\Big) v - \ell^k \Big(\frac{\partial A}{\partial u} . v\Big) v =$

$$\frac{\partial \lambda_k}{\partial u} \Big(\frac{\partial \ell^k}{\partial u} . v\Big) v + \lambda_k \Big(\frac{\partial^2 \ell^k}{\partial u^2} . v\Big) v + \lambda_k \Big(\frac{\partial \ell^k}{\partial u} . v\Big) v - \Big(\frac{\partial \ell^k}{\partial u} . Av\Big) v - \ell^k \Big(\frac{\partial^2 A}{\partial u^2} . v\Big) v - \ell^k \Big(\frac{\partial A}{\partial u} . v\Big) v$$

$$\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial u} \cdot v = -\frac{\partial \phi_o}{\partial u} Av + \sum_{k=1}^{N} \{ (p_k - p_k' \ell^k.v) \frac{\partial \lambda_k}{\partial u} \cdot v - \frac{\partial p_k}{\partial u} (A - \lambda_k I)v$$

$$+ p_k' [(\frac{\partial \ell^k}{\partial u} \cdot v)Av - (\frac{\partial \ell^k}{\partial u} \cdot Av) v] \} \qquad (2.1).$$

2. Le rôle de l'hypothèse non linéaire.

Pour commencer, nous posons $v = tr^k$. Nous pouvons supposer que ℓ^k est normalisé par $\ell^k.r^k = 1$, et nous obtenons :

$$\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial u} \cdot r^k = -\lambda_k \frac{\partial \phi_o}{\partial u} \cdot r^k + (p_k(t) - tp_k'(t)) \frac{\partial \lambda_k}{\partial u} \cdot r^k .$$

Puisque $\frac{\partial \lambda k}{\partial u} \cdot r^k \neq 0$ (hypothèse non-linéaire), nous en déduisons que la fonction $t \longmapsto p_k(t) - t\, p_k'(t)$ est indépendante de t, et puisque $p_k(u, 0) = 0$, il vient $p_k(u, t) = \rho_k(u)t$, et il reste $\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial u} \cdot r^k = -\lambda_k \frac{\partial \phi_o}{\partial u} \cdot r^k$ pour tout k, c'est-à-dire $\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial u} \cdot v = -\frac{\partial \phi_o}{\partial u} Av$. La fonction $\phi_o(u)$ est donc une entropie, et (2.1) devient :

$$\sum_{k=1}^{N} \{\ell^k.v \frac{\partial \rho k}{\partial u} \cdot (A - \lambda_k I)v + \rho_k \left[(\frac{\partial \ell^k}{\partial u} \cdot Av)v - (\frac{\partial \ell^k}{\partial u} \cdot v)Av\right]\} = 0.$$

C'est-à-dire, en posant $z(u) = \sum_{k=1}^{N} \rho_k \ell^k$:

$$(\frac{\partial z}{\partial u} \cdot v)Av = (\frac{\partial z}{\partial u} \cdot Av)v .$$

Et puisque les valeurs propres de A sont distinctes, nous en déduisons $(\frac{\partial z}{\partial u} \cdot v)w = (\frac{\partial z}{\partial u} \cdot w)v$ pour tous $v, w \in \mathbb{R}^N$. Cela implique l'existence d'une fonction $\beta(u)$ telle que $z(u) = \frac{\partial \beta}{\partial u}$. Finalement, on a $\phi = \phi_o + \mathcal{D}\beta$ et le théorème 1 est démontré.

Remarque : Si l'on n'impose pas à p_k d'être de classe $\mathcal{C}^1$, mais seulement lipschitzien, on obtient $p_k = a(u)t^+ + b(u)t^-$. Il s'ensuit toujours que ϕ_o est une entropie, mais $\phi - \phi_o = \varepsilon(u,v)\mathcal{D}\beta$ où $\varepsilon \in \{\pm\}$. En effet, lorsque ℓ_i dérive d'un potentiel $\mu_i(u)$ $(\ell_i = \frac{\partial \mu_i}{\partial u})$, la fonction

$u \longmapsto |\ell_i . u_x| = |\frac{\partial}{\partial x}(\mu_i(u))|$ est un invariant du système (0.1).

III. LE CAS LINEAIREMENT DEGENERE. UN EXEMPLE.

a) Cas général

Puisque $\frac{\partial \lambda_k}{\partial u} . r^k = 0$, on trouve, en posant $v = r^k$ dans (2.1), $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} . r^k = - \lambda_k \frac{\partial \phi_o}{\partial u} . r^k$. La fonction ϕ_o est donc une entropie, et il reste :

$$\sum_{k=1}^{N} \{ (p_k - p_k' \ell^k.v) \frac{\partial \lambda_k}{\partial u} . v - \frac{\partial p_k}{\partial u} . (A - \lambda_k I)v + p_k' [(\frac{\partial \ell_k}{\partial u} . v)Av - (\frac{\partial \ell_k}{\partial u} . Av)v] \} = 0 \qquad (3.1)$$

En posant $v = tr^i + sr^j$, $i \neq j$, on obtient :

$$s(p_i(t) - tp_i'(t)) \frac{\partial \lambda_i}{\partial u} . r^j + t(p_j(s) - sp_j'(s)) \frac{\partial \lambda_j}{\partial u} . r^i + (\lambda_i - \lambda_j) \{ s \frac{\partial p_i}{\partial u}(t).r^j - t \frac{\partial p_j}{\partial u}(s).r^i + st \sum_{k=1}^{N} c_{kji} p_k'(t_k) \} = 0 \qquad (3.2)$$

On a posé $c_{kji} = (D\ell^k.r^j)r^i - (D\ell^k.r^i)r^j$, et $t_k = t$, s ou 0 suivant que k = i, j ou un autre indice. En divisant par st, en faisant tendre s et t vers 0, on a, avec $\rho_k(u) = p_k'(0)$:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial u} \cdot r^j - \frac{\partial \rho_j}{\partial u} \cdot r^i + \sum_{k=1}^{N} \rho_k \, c_{kji} = 0.$$

C'est-à-dire (cf. II) qu'il existe $\beta = \beta(u)$ tel que $\sum_{k=1}^{N} \rho_k \, \ell^k = \frac{\partial \beta}{\partial u}$. Alors, avec $q_k(u, t) = \frac{1}{t} p_k(u, t) - \rho_k(u)$, on a $\phi = \phi_o + \beta + \sum_{k=1}^{N} (\ell^k.v) \, q_k$. Enfin, d'après (3.2), les fonctions q_k vérifient :

$$- tq_i'(t) \frac{\partial \lambda_i}{\partial u} \cdot r^j - sq_j'(s) \frac{\partial \lambda_j}{\partial u} \cdot r^i + (\lambda_i - \lambda_j)$$

$$\{\frac{\partial q_i}{\partial u}(t).r^j - \frac{\partial q_j}{\partial u}(s).r^i + (q_i(t) + t\, q_i'(t)) \, c_{iji}$$

$$- (q_j(s) + sq_j'(s)) \, c_{jij}\} = 0 .$$

En posant s = 0, cela donne :

$$\frac{\partial q_i}{\partial u}(t).r^j + (q_i + tq_i') \, c_{iji} + tq_i' \frac{1}{\lambda_j - \lambda_i} \frac{\partial \lambda_i}{\partial u} \cdot r^j$$

$$= 0 \qquad \text{pour tout } j \neq i \qquad (3.3).$$

Maintenant, v est un vecteur quelconque, $v = \sum_{k=1}^{N} t_k \, r^k$. En reportant dans (3.1) le résultat (3.3), nous obtenons :

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j<k \\ j,k\neq i}} t_j \, t_k \, (q_i + t_i \, q_i') \, (\lambda_j - \lambda_k) \, c_{ijk} = 0 \qquad (3.4).$$

Le système {(3.3),(3.4)} est équivalent à l'équation (3.1), c'est-à-dire au fait que $\sum_{i=1}^{N} (\ell^i.v) \, q_i(u, \ell^i.v)$ soit un invariant ($q_i(u,0) = 0$).

Cas $N \geq 3$: Supposons que, pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$, il existe des indices j, k distincts de i tels que $c_{ijk} \neq 0$, c'est-à-dire $(\frac{\partial \ell i}{\partial u} \cdot r^j) r^k \neq (\frac{\partial \ell i}{\partial u} \cdot r^k) r^j$. Alors l'égalité (3.4) montre que $q_i + t_i q_i'$ est affine, c'est-à-dire que q_i est affine, et puisque $q_i(u, o) = 0$, $q_i(u, t) = t\, Q_i(u)$.

Il nous reste alors, de (3.3) et (3.4) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q_i}{\partial u} \cdot r^j + Q_i \left(2\, c_{iji} + \dfrac{1}{\lambda_j - \lambda_i} \dfrac{\partial \lambda_i}{\partial u} \cdot r^j\right) \\ \qquad = 0 \qquad \text{pour tout } j \neq i \qquad (3.5), \\ Q_i(\lambda_j - \lambda_k) c_{ijk} + Q_j(\lambda_k - \lambda_i) c_{jki} + Q_k(\lambda_i - \lambda_j) c_{kij} \\ \qquad = 0 \quad \text{pour i,j,k distincts deux à deux} \quad (3.6). \end{cases}$$

Il est connu que le système (3.5) n'admet pas en général de solution non triviale. En particulier, le système $\frac{\partial Q}{\partial u} \cdot r^j = 0$, $j \neq i$ n'admet une solution non constante que si $\frac{\partial r^j}{\partial u} \cdot r^k = \frac{\partial r^k}{\partial u} \cdot r^j$ pour k, $j \neq i$.

On en déduit que, en général, $q_i \equiv 0$, et l'invariant ϕ est exactement $\phi_o + \mathcal{D}\beta$.

Remarquons que lorsque $N \geq 4$, le système (3.6) comporte plus d'équations que d'inconnues, et contribue donc en général à la nullité des Q_i.

Cas N = 2 : Ici, le système (3.4) est vide, et le système (3.3) est une équation différentielle ordinaire le long d'une courbe γ_i de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$. La solution générale est de la forme

$q_i = q_i^o\, h_i\,(y_i, z_i)$ où q_i^o est une solution particulière de (3.3) non nulle, et y_i, z_i sont des solutions indépendantes ($\det\left(\frac{\partial y_i}{\partial u}, \frac{\partial z_i}{\partial u}\right) \neq 0$) de :

$$\frac{\partial X}{\partial u} \cdot r^j + t\, X'\left(c_{iji} + \frac{1}{\lambda_j - \lambda_i} \frac{\partial \lambda_i}{\partial u} \cdot r^j\right) = 0.$$

On voit aisément qu'on peut choisir $q_i^o = tQ_i(u)$ (et on a bien $q_i^o(u, o) = 0$) où Q_i est une solution non nulle de

$$\frac{\partial Q_i}{\partial u} \cdot r^j + Q_i \left(2\, c_{iji} + \frac{1}{\lambda_j - \lambda_i} \frac{\partial \lambda_i}{\partial u} \cdot r^j\right) = 0.$$

Remarque : Dans le cas particulier où $c_{iji} \equiv 0$, la solution générale de (3.3) s'écrit :

$$q_i = h_i\,(\lambda_j,\ t(\lambda_j - \lambda_i)).$$

b) Le cas $\ell_i = \frac{\partial \mu_i}{\partial u}$

Supposons maintenant que chaque vecteur propre à gauche ℓ_i de A dérive d'un potentiel $\mu_i(u)$. Alors les coefficients c_{ijk} sont tous nuls, le système (3.4) est vide, et l'équation (3.3) devient :

$$\frac{\partial q_i}{\partial u} \cdot r^j + t\, q_i' \frac{1}{\lambda_j - \lambda_i} \frac{\partial \lambda_i}{\partial u} \cdot r^j = 0 \qquad j \neq i \qquad (3.6).$$

Ce système admet en général la solution $h_i(z_i)$ où $z_i(u, t)$ est une solution particulière, non constante, et h_i une fonction numérique arbitraire. Cependant, la fonction $\mu_i(u)$ est solution. Ainsi :

Proposition 3.1 : Lorsque les vecteurs propres à gauche ℓ_i dérivent d'un potentiel $\mu_i(u)$, les invariants du premier ordre de l'équation (0.1) sont "en général" de la forme ($N \geq 3$) $\phi_o + \mathfrak{D}\beta$, *où ϕ_o est une entropie, et $\mathfrak{D}\beta$ un lagrangien nul.*

En effet, la solution $h_i O \mu_i$ ne dépend que de u et s'annule ($q_i(u, o) = 0$) lorsque $t = 0$. Donc $h_i \equiv 0$. Plus précisément, si $h_i \not\equiv 0$, $(h_i O \mu_i) \cdot \ell^i . u_x = D_x(H_i O \mu_i O u)$.

Finalement, l'hypothèse, pourtant très restrictive, $\ell_i = \dfrac{\partial \mu_i}{\partial u}$, ne conduit pas à l'existence de nouveaux invariants.

c) Un exemple exceptionnel.

Considérons maintenant le système (diagonal) :

$$u^i_t + \lambda_i(u)\, u^i_x = 0 \qquad 1 \leq i \leq N \tag{3.7}$$

Ce système est hyperbolique strict si $\lambda_i \neq \lambda_j$ pour $i \neq j$, et vraiment non linéaire si $\dfrac{\partial \lambda_i}{\partial u^i} = 0$. Nous supposerons en fait qu'il existe des fonctions $z_i(u^i)$, $1 \leq i \leq N$, telles que $\lambda_i = \prod_{j \neq i} z_j(u^j)$. L'hyperbolicité stricte sera acquise en supposant que $\mathrm{Inf}\, z_j(u^j) > \mathrm{Sup}\, z_{j+1}(u^{j+1})$, et $z_j > 0$.

Le système (3.6) devient alors :

$$\frac{\partial q_i}{\partial u^j} + t\, q'_i \frac{z'_j}{z_i - z_j} = 0 \tag{3.8}$$

Ce système admet les solutions particulières u^i et $t \prod_{j \neq i} (z_i - z_j)^{-1}$. Finalement la solution générale de (3.8) est $h_i(u^i, t \prod_{j \neq i} (z_i - z_j)^{-1})$ et la condition $q_i(u,o) = 0$ implique simplement $h_i(u^i, O) = 0$.

Proposition 3.2 : *Lorsque* $\lambda_i = \prod_{j\neq i} z_j(u^j)$ *et que le système (3.7) est strictement hyperbolique, les invariants du premier ordre sont de la forme* $\phi_o + \mathfrak{D}\beta + \sum_{i=1}^{N} \ell^i.v\, h_i(u^i, \frac{\ell^i.v}{\prod_{j\neq i}(z_i - z_j)})$, *où* ϕ_o *est une entropie,* $\mathfrak{D}\beta$ *un lagrangien nul, et* h_i *une fonction arbitraire de deux variables, vérifiant* $h_i(u^i, 0) = 0$.

IV. REMARQUES SUR LE CAS MIXTE.

Nous supposons maintenant qu'un certain nombre de champs caractéristiques sont vraiment non linéaires, et que les autres sont linéairement dégénérés.

Nous posons $J = \{1 \leq j \leq N ; \frac{\partial \lambda_j}{\partial u} . r^j \equiv 0\}$, et $I = \{ 1 \leq j \leq N ; j \notin J \}$. Si $j \in I$, on a $\frac{\partial \lambda_j}{\partial u} . r^j \neq 0$ pour tout u.

Reprenant l'égalité (2.1), et en posant $v = tr^k$, $k \in I$, on obtient (de même que dans II-b) $p_k(u, t) = \rho_k(u)t$, ainsi que $\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial u} . r^k = - \lambda_k \frac{\partial \phi_o}{\partial u} . r^k$.

Si $k \notin I$, on obtient encore avec $v = r^k$ dans (2.1), $\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial u} . r^k = - \lambda_k \frac{\partial \phi_o}{\partial u} . r^k$. Finalement $\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial u} = - \frac{\partial \phi_o}{\partial u} A$, et ϕ_o est une entropie. Il nous reste, en posant $\rho_k(u) = p_k'(u, 0)$ et $q_k = \frac{1}{t} p_k - \rho_k$:

$$\sum_{k=1}^{N} \{ \ell^k.v \frac{\partial \rho_k}{\partial u} (A - \lambda_k I)v + \rho_k \left[(\frac{\partial \ell^k}{\partial u} . Av)v - (\frac{\partial \ell^k}{\partial u} .v) Av \right] \}$$

$$+ \sum_{k\ J} \{ (\ell^k.v)^2 q_k' \frac{\partial \lambda_k}{\partial u} . v + (\ell^k.v) \frac{\partial q_k}{\partial u} . (A - \lambda_k I)v$$

$$+ (q_k + (\ell^k.v)q_k') \left[(\frac{\partial \ell^k}{\partial u} . Av)v - (\frac{\partial \ell^k}{\partial u} . v) Av \right] \} = 0.$$

La différentielle seconde en v = 0 du premier membre de cette égalité est exactement la première somme, qui est donc nulle :

$$\sum_{k=1}^{N} \{ \ell^k.v \frac{\partial \rho_k}{\partial u} . (A - \lambda_k I)v + \rho_k \left[(\frac{\partial \ell^k}{\partial u} . Av)v - (\frac{\partial \ell^k}{\partial u} . v)Av \right] \} = 0.$$

On en déduit, comme en II.b, que $\sum_{k=1}^{N} \rho_k(u)\ \ell^k.v$ est un lagrangien nul β. Il nous reste :

$$\sum_{k\ J} \{ (\ell^k.v)^2\ q_k' \frac{\partial \lambda_k}{\partial u} . v + (\ell^k.v) \frac{\partial q_k}{\partial u} . (A - \lambda_k I)v$$

$$+ (q_k + (\ell^k.v)q_k') \left[(\frac{\partial \ell^k}{\partial u} . Av)v - (\frac{\partial \ell^k}{\partial u} . v)Av \right] \} = 0.$$

Cette dernière égalité se décompose comme au III en :

$$\begin{cases} \frac{\partial q_i}{\partial u} . r^j + (q_i + tq_i')c_{iji} + tq_i' \frac{1}{\lambda_j - \lambda_i} \frac{\partial \lambda_i}{\partial u} . r^j \\ \qquad = 0 \quad \text{pour} \quad i \in J\ ,\ j \neq i \qquad (4.1), \\ \sum_{i \in J} \sum_{\substack{1 \leq j \leq k \leq N \\ j,k \neq i}} t_j t_k (q_i + t_i q_i')(\lambda_j - \lambda_k)c_{ijk} = 0 \qquad (4.2). \end{cases}$$

De même qu'au paragraphe précédent, le nombre des invariants dépendra de l'annulation éventuelle des coefficients c_{ijk}, $i \in J$, $j,k \neq i$; lorsque $N \geq 3$, l'équation (4.1) montre qu'il n'y a pas, en général, d'invariant d'ordre 1, à part $\phi_o + \mathcal{D}\beta$, où ϕ_o est une entropie et $\mathcal{D}\beta$ un lagrangien nul.

Le cas suivant n'est pas générique.

V. LA DYNAMIQUE DES GAZ MONODIMENSIONELLE.

Nous considérons un gaz situé dans un tuyau infini, dont les paramètres d'état sont les densité de masse ρ, d'énergie e, et la vitesse u.

L'approximation monodimensionelle consiste à supposer que les variables d'état ne dépendent que de l'abscisse longitudinale x du tuyau, et du temps t. Les équations d'état sont alors :

$$
\left|\begin{array}{l}
\text{Conservation de la masse } \rho_t + (\rho u)_x = 0 \qquad (5.1), \\
\text{C. de la quantité} \\
\quad \text{de mouvement } (\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_x = 0 \qquad (5.2), \\
\text{C. de l'énergie} \\
\quad (\rho e + \frac{1}{2}\rho u^2)_t + \left[(\rho e + \frac{1}{2}\rho u^2 + p)u\right]_x = 0 \qquad (5.3).
\end{array}\right. \quad ( )
$$

La pression p est une fonction de (ρ,e) seulement qui ne dépend que du gaz considéré. Le système ( ) est strictement hyperbolique lorsque $\delta^2 = p_\rho + \frac{1}{\rho^2} pp_e > 0$. Les valeurs propres sont alors $\lambda_1 = u - \delta$, $\lambda_2 = u$, $\lambda_3 = u + \delta$. Si on exprime le système sous la forme $(\rho,u,e)_t + A(\rho,u,e)_x = 0$, on a $\ell^2 = \nabla z$, où $z(\rho,e)$ vérifie $Lz = \rho^2 \frac{\partial z}{\partial \rho} + p \frac{\partial z}{\partial e} = 0$.

D'autre part $\nabla\lambda_2 . r^2 \equiv 0$ et le deuxième champ caractéristique est linéairement dégénéré. Lorsque $L(\rho\delta) \neq 0$, les autres champs sont vraiment non linéaires.

Les invariants sont alors les suivants :

Théorème 5.1 : *On suppose que le système* ($\mathcal{G}$) *est strictement hyperbolique* ($\delta^2 > 0$) *et que les 1ers et 3e champs caractéristiques sont vraiment non-linéaires.*

Alors les invariants du premier ordre s'écrivent $\phi_o + \mathfrak{D}\beta + \ell^2.v\ h(z, \frac{1}{\rho}\ell^2.v)$, *où* ϕ_o *est une entropie,* $\mathfrak{D}\beta$ *un lagrangien nul,* h *une fonction arbitraire vérifiant* $h(z,0) = 0$.

Démonstration : D'après le paragraphe IV, nous devons résoudre (4.1) (le système (4.2) est vide, puisque $\ell^2 = \nabla z$), avec $i = 2$, $j = 1$ ou 3. Cela s'écrit, avec $\varepsilon \in \{+1, -1\}$:

$$\nabla q.(\rho^2, \varepsilon\,\delta\,\rho, p) + \rho t\, q' = 0.$$

C'est-à-dire :

$$\begin{cases} \rho\dfrac{\partial q}{\partial \rho} + t\, q' + \dfrac{1}{\rho}\, p\, \dfrac{\partial q}{\partial e} = 0 & (5.4), \\[2ex] \dfrac{\partial q}{\partial u} = 0 & (5.5). \end{cases}$$

La solution générale d'un tel système ($\nabla Q.X^j = 0$, $1 \leq j \leq M-2$ dans $\mathbb{R}^M$) est habituellement $h(y)$ où y est une solution non constante, et h une fonction arbitraire ; exceptionnellement, on trouve $Q = h(y_1, y_2)$ où h une fonction arbitraire de deux variables. C'est le cas ici, en vertu de l'égalité $(X^1.\nabla)X^2 - (X^2.\nabla)X^1 = 0$ dans l'espace $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$. On choisit comme solutions élémentaires de (5.4) et (5.5) les quantités $z(\rho,e)$ et $\frac{1}{\rho}\, t$. Puisque $q(\rho,u,e,o) = 0$, on obtient le Théorème 5.1.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] D. SERRE : Les invariants du premier ordre de l'équation d'Euler en dimension trois. A paraître dans Arch. Rat. Mech. Anal.

[2] D. SERRE : Invariants à densité pour l'équation de Kortweg-de-Vries. Comptes Rendus des Séances de l'Acad. Sciences, Paris. 284 n° 10 (1981).

[3] D. SERRE : Invariants de diverses équations d'évolution issues de la physique. Non linear partial differential equations and their applications. H. Brezis & J.J. Lions. Collège de France seminar. Vol III. Pitman.

[4] J. GLIMM : Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations. 1965, Comm. Pure Appl. Math., 18 pp 697-715.

[5] P.D. LAX : Development of singularities of solutions of non-linear hyperbolic partial differential equations. J. Math. Phys. 5 (1964) pp 611-613.

C. R. Acad. Sc. Paris, t. 292 (11 mai 1981) **Série I — 785**

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Relations d'ordre entre formes quadratiques en compacité par compensation.* Note (*) de **Denis Serre,** présentée par Henri Cartan.

La théorie de la compacité par compensation traite de la topologie faible sur le graphe d'une famille d'opérateurs différentiels à coefficients constants. Elle prouve qu'une forme quadratique est une fonctionnelle faiblement séquentiellement semi-continue inférieurement si et seulement si elle prend des valeurs positives ou nulles sur un cône Λ. Nous comparons ici ces formes quadratiques à celles qui s'annulent sur Λ. Des applications de ces résultats en calcul des variations, à propos de la condition de Legendre-Hadamard, feront l'objet d'une prochaine publication.

The use of the compensated compactness theory in the calculus of variations leads to the introduction of quadratic forms which take non-negative values over a cone. Here, we give a characterization of such quadratic forms. Some applications of these results, connected to the Legendre-Hadamard condition, will be given in a forthcoming Note.

I. INTRODUCTION. — La théorie de la compacité par compensation est due à F. Murat et L. Tartar. Rappelons-en le résultat principal.

Soient n, m, p trois nombres entiers $\geqq 1$, et nmp nombres réels a_{ijk}, $1 \leqq i \leqq n$, $1 \leqq j \leqq m$, $1 \leqq k \leqq p$. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^m$, et considérons l'espace $Z(\Omega)$ suivant :

$$Z(\Omega) = \left\{ \vec{u} \in (L^2(\Omega))^n ;\ \forall\, 1 \leqq k \leqq p,\ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} a_{ijk} \in L^2(\Omega) \right\}.$$

Muni de la norme du graphe, $Z(\Omega)$ est un espace de Banach. Définissons-les cônes $\mathscr{V}$ et Λ :

$$\mathscr{V} = \left\{ (\lambda, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m ;\ \forall\, 1 \leqq k \leqq p,\ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ijk} \lambda_i \xi_j = 0 \right\},$$

$$\Lambda = \{ \lambda \in \mathbb{R}^n ;\ \exists\, \xi \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \text{ et } (\lambda, \xi) \in \mathscr{V} \}.$$

Le théorème de compacité par compensation ([1], [2]) est le suivant :

THÉORÈME (Murat-Tartar). — *Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *pour toute suite $\vec{u}_\nu \overset{\nu \to \infty}{\longrightarrow} \vec{u}$ dans $Z(\Omega)$ faible, on a :*

$$(q(\vec{u}_\nu) \overset{\nu \to \infty}{\longrightarrow} l \text{ dans } \mathscr{D}'(\Omega) \text{ faible} \quad \Rightarrow \quad (q(\vec{u}) \leqq l);$$

(ii) *pour tout $\lambda \in \Lambda$, on a $q(\lambda) \geqq 0$.* □

Une forme q vérifiant (ii) sera dite Λ-*convexe*. Le but de cette Note est de caractériser les formes quadratiques Λ-convexes, le résultat principal étant la proposition 4.

II. ÉTUDE GÉNÉRALE. — Soit E un espace vectoriel réel euclidien de dimension finie, et Λ un cône de E, fermé, engendrant E. Notons $f(x) = |x|^2$ pour $x \in E$. Si X est un espace vectoriel réel, on note $\mathscr{Q}(X)$ [resp. $\mathscr{Q}_+(X)$] l'ensemble des formes quadratiques (resp. définies positives) sur X. L'ensemble des formes quadratiques sur E qui s'annulent sur Λ est noté $\mathscr{Q}_0(\Lambda)$. Il ne contient aucune forme semie-définie positive autre que la forme nulle.

Nous écrivons, pour $q_1, q_2 \in \mathscr{Q}(E)$, $q_1 \succ q_2$ lorsqu'il existe $q_0 \in \mathscr{Q}_0(\Lambda)$ telle que $q_1 - q_2 \geqq q_0$ sur E. On a ainsi défini une relation d'ordre sur $\mathscr{Q}(E)$ compatible avec la structure d'espace vectoriel, et par passage au quotient dans $\mathscr{Q}(E)/\mathscr{Q}_0(E)$, on obtient une relation d'ordre strict.

Remarque et définition. – Toute forme $q \succ 0$ est Λ-convexe. Nous dirons qu'une telle forme est *trivialement* Λ-convexe. Il revient au même de dire que q est de la forme $r+q_0$, avec $r \geqq 0$ et $q_0 \in \mathscr{Q}_0(\Lambda)$.

Pour toute $q \in \mathscr{Q}(E)$, on pose $\alpha(q) = \operatorname{Inf}\{\varepsilon \in \mathbb{R};\ q+\varepsilon f \succ 0\}$. On montre que $q+\alpha(q)f \succ 0$, et on note $C(q)$ l'ensemble des formes $r \geqq 0$ telles que $r \in q+\alpha(q)f+\mathscr{Q}_0(E)$. En particulier, $r \in C(q)$ implique $\alpha(r)=0$. L'ensemble $C(q)$ est un convexe compact non vide de $\mathscr{Q}(E)$.

LEMME 1. – *Soient* $r \in \mathscr{Q}(E)$, $r \geqq 0$ *et* $H = \operatorname{Ker} r$. *On a* $\alpha(r) \leqq 0$ *et* :

$$(\alpha(r)=0) \iff (H \neq \{0\} \text{ et } \forall q_0 \in \mathscr{Q}_0(\Lambda),\ q_0|_H \text{ représente } 0). \quad \square$$

Et on a :

PROPOSITION 2. – *Soit* $q \in \mathscr{Q}(E)$:

1° *si* $r_1, r_2 \in C(q)$ *et* $r_3 \in]r_1, r_2[$, *on a* :

$$\operatorname{Ker} r_3 = \operatorname{Ker} r_1 \cap \operatorname{Ker} r_2;$$

2° *tous les points internes de* $C(q)$ *ont même noyau. Celui-ci est noté* $H(q)$;

3° *si* $r \in C(q)$ *n'est pas interne, on a* $\operatorname{Ker} r \supset H(q)$;

4° *la direction de l'espace affine engendré par* $C(q)$ *est* $\vec{X}(q) = \{q_0 \in \mathscr{Q}_0(\Lambda);\ H(q) \subset \operatorname{Ker} q_0\}$;

5° $H(q)$ *est l'unique élément* H *de l'ensemble* $\{\operatorname{Ker} r,\ r \neq C(q)\}$ *tel que* $\forall q_0 \in \mathscr{Q}_0(\Lambda)$:

$$(q_0|_H \geqq 0 \text{ et } \operatorname{Ker}(q_0|_H) \subset \operatorname{Ker} q_0) \Rightarrow (q_0|_H = 0). \quad \square$$

Formes Λ*-convexes.* – Nous posons :

$$\mathscr{H}(\Lambda) = \{H;\ H \text{ est un sous-espace vectoriel de E tel que } H \neq \{0\},$$
$$H \cap \Lambda = \{0\} \text{ et } \forall q_0 \in \mathscr{Q}_0(\Lambda),\ q_0|_H \text{ représente } 0\},$$

$$\mathscr{H}_0(\Lambda) = \{H \in \mathscr{H}(\Lambda);\ \forall q_0 \in \mathscr{Q}_0(\Lambda),\ (q_0|_H \geqq 0 \text{ et } \operatorname{Ker}(q_0|_H) \subset \operatorname{Ker} q_0) \Rightarrow (q_0|_H = 0)\}.$$

On a alors :

PROPOSITION 3. – *Pour une forme quadratique* $r \geqq 0$, *les conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) *il existe* $q \in \mathscr{Q}(E)$, Λ*-convexe et non triviale, telle que* $r \in C(q)$;

(ii) $Ker\, r \in \mathscr{H}(\Lambda)$;

(iii) $r = Q \circ \pi_H$, *où* $H \in \mathscr{H}(\Lambda)$, π_H *désigne la projection canonique* $E \to E/H$, *et* $Q \in \mathscr{Q}_+(E/H)$. $\square$

PROPOSITION 4. – *Pour un sous-espace vectoriel* H *de* E, *les conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) *il existe* $q \in \mathscr{Q}(E)$, Λ*-convexe et non triviale, telle que* $H(q) = H$;

(ii) $H \in \mathscr{H}_0(\Lambda)$.

Nous avons vu que toute $q \in \mathscr{Q}(E)$ s'écrit $q = r - \alpha(q)f + q_0$ où r peut être choisie arbitrairement dans le convexe $C(q)$, et où $q_0 \in \mathscr{Q}_0(\Lambda)$. Réciproquement, si $q = r - \varepsilon f + q_0$, avec $r \geqq 0$, $\alpha(r)=0$, ε réel et $q_0 \in \mathscr{Q}_0(\Lambda)$, on a $r \in C(q)$ et $\varepsilon = \alpha(q)$. On caractérise les formes Λ-convexes non triviales de la façon suivante :

PROPOSITION 5. – *Pour que* $q \in \mathscr{Q}(E)$ *soit* Λ*-convexe et non triviale, il faut et il suffit que, pour* $r \in C(q)$, *on ait* :

$$0 < \alpha(q) \leqq \operatorname*{Inf}_{x \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{r(x)}{f(x)}.$$

Cette condition ne dépend pas du choix de r *dans* $C(q)$. $\square$

C. R. Acad. Sc. Paris, t. 292 (11 mai 1981) Série I — 787

Il découle de la proposition 2, alinéa 4, que l'unicité de la décomposition $q=r-\varepsilon f+q_0$ [avec $r\in C(q)$ et $q_0\in\mathcal{Q}_0(\Lambda)$] a lieu si et seulement si $C(q)$ est réduit à un élément, c'est-à-dire si :

$$(q_0\in\mathcal{Q}_0(\Lambda),\ \operatorname{Ker} q_0\supset H(q)) \quad\Rightarrow\quad (q_0\equiv 0).$$

On en déduit :

PROPOSITION 6. — *Les assertions suivantes sont équivalentes* :

(i) $\mathcal{H}(\Lambda)=\mathcal{H}_0(\Lambda)$;

(ii) *pour toute forme* q, Λ*-convexe et non-triviale, la décomposition* $q=r+q_0-\varepsilon f$, *avec* $r\geqq 0$, $\alpha(r)=0$, $q_0\in\mathcal{Q}_0(\Lambda)$, *est unique* [*c'est-à-dire*, $C(q)$ *est réduit à un élément*];

(iii) *pour tout* $H\in\mathcal{H}_0(\Lambda)$ *et toute* $q_0\in\mathcal{Q}_0(\Lambda)$, $(H\subset\operatorname{Ker} q_0)\Rightarrow(q_0=0)$. □

III. EXEMPLES. — 1. Soit q_0 une forme quadratique sur E, indéfinie, et $\Lambda=q_0^{-1}(0)$. Alors Λ engendre E et $\mathcal{Q}_0(\Lambda)=\mathbb{R}q_0$. Les ensembles $\mathcal{H}(\Lambda)$ et $\mathcal{H}_0(\Lambda)$ sont vides. Toute forme quadratique Λ-convexe est donc triviale, et s'écrit $r+tq_0$ où $r\geqq 0$ et $t\in\mathbb{R}$.

Ce résultat s'applique à l'étude de l'espace :

$$Z(\Omega)=\{(\vec{u},\vec{v})\in(L^2(\Omega))^{2n};\ \operatorname{div}\vec{u}\in L^2(\Omega),\ \operatorname{rot}\vec{v}\in L^2(\Omega)\}.$$

Dans ce cas, on a $E=\mathbb{R}^n+\mathbb{R}^n$, $\Lambda=\{(\lambda,\eta)\in E;\ \lambda\perp\eta\}$ et $q_0(\lambda,\eta)=\lambda.\eta$. Toute forme quadratique sur E définissant une fonctionnelle faiblement séquentiellement semi-continue inférieurement sur $Z(\Omega)$ est donc de la forme $r+t\lambda.\eta$ où $r(\lambda,\eta)\geqq 0$ pour tout $(\lambda,\eta)\in E$.

2. Supposons que $E=\mathbb{R}^3$, et que Λ soit la réunion de quatre droites dont trois quelconques ne sont jamais coplanaires.

Alors $\dim\mathcal{Q}_0(\Lambda)=2$. Soient γ_1 et γ_2 deux coniques distinctes de $\mathcal{P}(E)$, passant chacune par $\mathcal{P}(\Lambda)$. Alors :

THÉORÈME 7. — *Soit* H *un sous-espace vectoriel de* E, *et* δ *sa trace dans* $\mathcal{P}(E)$. *Alors* $H\in\mathcal{H}(\Lambda)$ *si, et seulement si* H *est un plan, et si la droite* δ *coupe* $\gamma_1\cup\gamma_2$ *en quatre points réels distincts* a_1, b_1, a_2, b_2 ($\{a_i,b_i\}=\delta\cap\gamma_i$) *dont le birapport, dans cet ordre, est strictement négatif.* □

COROLLAIRE 8. — *On a* $\mathcal{H}(\Lambda)=\mathcal{H}_0(\Lambda)$, *et la décomposition des formes* Λ*-convexes non triviales est unique. C'est-à-dire, pour toute* $q\in\mathcal{Q}(E)$, *l'ensemble* $C(q)$ *est réduit à un point.* □

(*) Remise le 11 mai 1981.

[1] F. MURAT, *Proceedings of the International Meeting on Recent Methods in Nonlinear Analysis*, Rome, mai 1978, Pitagora, Bologne, 1979, p. 245-256.

[2] L. TARTAR, *Nonlinear Analysis and Mechanics, Heriot-Watt symposium*, IV, R. J. KNOPS, éd., Research Notes in Mathematics, n° 39, Pitman, London, 1979, p. 136-212.

Analyse numérique et fonctionnelle C.N.R.S.

et *Université de Paris-Sud*, Bât. n° 425, 91405 *Orsay Cedex.*

C. R. Acad. Sc. Paris, t. 293 (6 juillet 1981) Série I – 23

ANALYSE MATHÉMATIQUE. – *Condition de Legendre-Hadamard; espaces de matrices de rang* $\neq 1$. Note (*) de **Denis Serre,** présentée par Henri Cartan.

Nous utilisons les résultats d'une Note précédente pour l'étude de la condition de Legendre-Hadamard. Nous sommes conduits à examiner des sous-espaces vectoriels de matrices dont aucune n'est de rang 1. On décrit une classe de tels espaces qui permettent de construire, de manière non triviale, des formes quadratiques qui vérifient la condition de Legendre-Hadamard.

We use the results of a previous note for studying the Legendre-Hadamard condition in the calculus of variations. We must consider linear subspaces of real matrices whose rank is different from one. We exhibit a class of such spaces, which allow us to construct, in a non-trivial manner, quadratic forms satisfying the Legendre-Hadamard condition.

I. INTRODUCTION. – Soient n et m deux entiers $\geqq 2$, et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^m$. Posons :

$$Z(\Omega)=\left\{ u\in(L^\infty(\Omega)^m)^n;\ \forall\, 1\leqq i\leqq n,\ 1\leqq j<k\leqq m,\ \frac{\partial u_{ij}}{\partial x_k}-\frac{\partial u_{ik}}{\partial x_j}\in L^\infty(\Omega)\right\}.$$

Muni de la norme :

$$\|u\|=|u|_\infty+\sum_{i=1}^{n}\sum_{1\leqq j\leqq k\leqq m}\left|\frac{\partial u_{ij}}{\partial x_k}-\frac{\partial u_{ik}}{\partial x_j}\right|_\infty,$$

$Z(\Omega)$ est un espace de Banach. Soit F une fonction continue, définie sur l'espace $M_{n.\,m}(\mathbb{R})$ des matrices réelles à n lignes et m colonnes, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Supposons que F vérifie :

$$(\mathscr{P}^+)\quad\begin{cases}\text{si } u^n\to u \quad \text{dans } Z(\Omega) \text{ faible-étoile},\\ \text{si } F\circ u^n\to\mu \text{ dans } \mathscr{D}'(\Omega),\\ \text{alors } \mu\geqq F\circ u.\end{cases}$$

On en déduit [1] que F vérifie la condition suivante :

$$\begin{cases}\forall\, v\in M_{n.\,m}(\mathbb{R}),\\ \forall\, w\in\Lambda=\{w\in M_{n.\,m}(\mathbb{R});\ rg\, w\leqq 1\},\\ \text{la fonction } t\mapsto F(v+tw) \text{ est convexe.}\end{cases}$$

Si F est de plus deux fois différentiable, cette dernière condition équivaut à :

$$(L-H)\qquad \sum_{i,\,j=1}^{n}\sum_{k,\,l=1}^{m}\frac{\partial^2 F}{\partial v_{ik}\,\partial v_{jl}}\circ u(x)\,\xi_i\xi_j\eta_k\eta_l\geqq 0,$$

pour p. p. $x\in\Omega$, et tout $(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$.

C'est la condition de Legendre-Hadamard [1]. La théorie de la compacité par compensation [2] montre que, si F est une forme quadratique, $(\mathscr{P}^+)\Leftrightarrow(L-H)$. Nous abordons donc ici l'étude des formes quadratiques q sur $M_{n.\,m}(\mathbb{R})$, $q=\sum_{i,j,k,l}a_{jl}^{ik}v_{ik}v_{jl}$, qui vérifient $\sum_{i,j,k,l}a_{jl}^{ik}\xi_i\xi_j\eta_k\eta_l\geqq 0$ pour tout $(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$, c'est-à-dire :

$$(L-H.1)\qquad q(v)\geqq 0 \qquad \text{pour} \quad v\in\Lambda.$$

Une étude des conditions du type ci-dessus, dans un cadre plus général, est faite dans une Note précédente [3]. Nous avons montré que cette étude revient à déterminer les deux ensembles suivants :

$$Q_0(\Lambda)=\{q \text{ forme quadratique sur } M_{n,m}(\mathbb{R});\ q(v)=0,\ \forall v\in\Lambda\},$$

$$\mathscr{H}_0(\Lambda)=\{H \text{ sous-espace vectoriel de } M_{n,m}(\mathbb{R}),$$
$$H\neq\{0\};\ H\cap\Lambda=\{0\} \text{ et } \forall q_0\in Q_0(\Lambda),$$
$$(q_0|_H\geqq 0,\ \operatorname{Ker}(q_0|_H)=H\cap\operatorname{Ker} q_0)\Rightarrow(q_0|_H=0)\}.$$

Le calcul de l'espace vectoriel $Q_0(\Lambda)$ est aisé : $Q_0(\Lambda)$ a pour base l'ensemble des formes $v_{ik}v_{jl}-v_{il}v_{jk}$, $1\leqq i<j\leqq n$, $1\leqq k<l\leqq m$. On a dim $Q_0(\Lambda)=(n(n-1))/2(m(m-1)/2)$.

L'objet de cette Note est l'étude de $\mathscr{H}_0(\Lambda)$. Nous étudions tout d'abord les sous-espaces H tels que $H\cap\Lambda=\{0\}$.

II. Sous-espaces sans éléments décomposables. – Par la suite, on identifie $M_{n,m}(\mathbb{R})$ à $\mathscr{L}(F, E)=E\otimes F'$, où E et F sont des espaces vectoriels réels de dimension $n\geqq 2$ et $m\geqq 2$.

On a alors $\Lambda=\{x\otimes y';\ x\in E, y'\in F'\}$. *On appelle sous-espace sans élément décomposable* (en abrégé s. e. d.) tout sous-espace vectoriel H de $E\otimes F'$ tel que $H\cap\Lambda=\{0\}$. Si H est un sous-espace vectoriel de $E\otimes F'$, on note T_H la composée des applications canoniques $E\times F'\mapsto E\otimes F'$ et $E\otimes F'\mapsto(E\otimes F')/H$. L'espace H est s. e. d. si et seulement si $(T_H(x, y')=0\Rightarrow x=0$ ou $y'=0)$. On en déduit dim $H\leqq nm-\operatorname{Sup}(n, m)$, et si m est impair dim $H\leqq nm-m-1$. Lorsque n et m sont grands, ces bornes ne semblent pas atteintes; toutefois elles le sont pour $n=2$, ou pour $n=m=3$, $n=m=4$ (exemples 1 et 2).

Maximalité. – Soit H un s. e. d. On dit que H est maximal si $(H\subset K, K$ s. e. d.$)\Rightarrow H=K$. On montre que H s. e. d. est maximal si et seulement si T_H est de plus surjective. Avec le lemme de Sard on en déduit qu'alors dim $H\geqq(n-1)(m-1)$. Cette borne est atteinte lorsque n ou m est impair; si n et m sont pairs, on sait construire un espace H s. e. d. maximal de dimension $(n-1)(m-1)+1$ (exemple 3).

Réductibilité. – On dit qu'un sous-espace vectoriel H de $E\otimes F'$ est réductible s'il existe des hyperplans E_1 et F_1' de E et F', tels que $H\subset E_1\otimes F'+E\otimes F_1'$. Lorsque H est s. e. d. réductible on a dim $H\leqq nm-\operatorname{Sup}(n, m)-1$ et, si m est impair, dim $H\leqq nm-m-2$ (exemple 4).

Exemples. – 1° Soit $\mathbb{H}$ l'espace des quaternions et $T:\mathbb{H}\times\mathbb{H}\mapsto\mathbb{H}$, $T(q_1, q_2)=q_1q_2$. Alors $\operatorname{Ker} T^{\otimes}:\mathbb{H}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ est un espace s. e. d. maximal irréductible de dimension $12=4\times4-4$.

2° On pose $E=F'=\{q\in\mathbb{H};\ q+\bar{q}=0\}$, et $S:E\times F'\mapsto\mathbb{H}$, $S(q_1, q_2)=q_1q_2$. Alors $\operatorname{Ker} S^{\otimes}$ est s. e. d. maximal irréductible de dimension $5=3\times3-4$. Lorsqu'on munit E et F' des bases $\{i, j, k\}$, $\operatorname{Ker} S^{\otimes}$ est l'espace des matrices symétriques 3×3 à trace nulle.

3° On pose $E=\mathbb{R}_{n-1}[X]=\{P\in\mathbb{R}[X];\ d^{\circ}P\leqq n-1\}$, $F'=\mathbb{R}_{m-1}[X]$ et $\mathscr{R}:E\times F'\to\mathbb{R}_{n+m-2}[X]$, le produit habituel. Lorsque n ou m est impair, $\mathscr{R}$ est surjective, et $\operatorname{Ker}\mathscr{R}^{\otimes}$ est s. e. d. maximal réductible, de dimension $(n-1)(m-1)$. Lorsque n et m sont pairs, on désigne par $\overline{\mathscr{R}}$ la composée de $\mathscr{R}$ et de la projection $\mathbb{R}_{n+m-2}[X]\mapsto\mathbb{R}_{n+m-2}[X]/(1+X^{n+m-2})$. Alors $\operatorname{Ker}\overline{\mathscr{R}}^{\otimes}$ est s. e. d. maximal irréductible de dimension $(n-1)(m-1)+1$.

4° $E=F=\mathbb{R}^3$. On pose :

$$H=\left\{ v\in M_{3,3}(\mathbb{R});\ \exists (a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4;\ v=\begin{pmatrix} b+d & a-c & c \\ a+c & 0 & d \\ a & b & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

La présence d'un zéro en v_{33} (ou encore en v_{22}) indique que H est réductible. Il est aisé de voir que H est s. e. d. Nous verrons au paragraphe III que $H\in\mathscr{H}_0(\Lambda)$, ce qui n'est pas le cas de Ker $T^{\otimes}$, Ker $S^{\otimes}$, Ker $\mathscr{R}^{\otimes}$ dans les exemples précédents. L'appartenance ou non de Ker $\overline{\mathscr{R}}^{\otimes}$ à $\mathscr{H}_0(\Lambda)$ n'est pas encore établie.

III. Les ensembles $\mathscr{H}_0(\Lambda)$ et $\mathscr{H}(\Lambda)$. – Rappelons [3] que $\mathscr{H}_0(\Lambda)\subset\mathscr{H}(\Lambda)=\{H$ sous-espace vectoriel de $E\times F'$, $H\cap\Lambda=\{0\}$ et $\forall q_0\in Q_0(\Lambda)$, $\exists x\in H$, $x\neq 0$, $q_0(x)=0\}$, et que nous avons :

$$\mathscr{H}_0(\Lambda)\neq\emptyset \quad\Leftrightarrow\quad \mathscr{H}(\Lambda)\neq\emptyset.$$

Lorsque $n=m=3$, on peut montrer que $\mathscr{H}_0(\Lambda)=\mathscr{H}(\Lambda)$. Ceci implique l'unicité de la décomposition des formes quadratiques Λ-convexes non triviales [3]. A l'aide du théorème 1 ci-dessous, on montre que si $H\in\mathscr{H}_0(\Lambda)$, alors dim $H\geqq 4$, et que l'espace introduit à l'exemple 4 appartient à $\mathscr{H}_0(\Lambda)$.

Cas réductible. – Soit $H\subset E_1\otimes F'+E\otimes F_1'$, s. e. d. réductible de $E\otimes F'$, (n et $m\geqq 2$ quelconques). Les sous-espaces $X=H\cap(E_1\otimes F')$ et $Y=H\cap(E\otimes F_1')$ sont s. e. d. dans $E_1\otimes F'$ et $E\otimes F_1'$. Soit $\mathscr{C}(X)$ le cône convexe ouvert des formes quadratiques r sur $E_1\otimes F'$, nulles sur les éléments $x_1\otimes y'$, telles que $r|_X$ soit définie positive; le cône des restrictions à $E_1\otimes F_1'$ des éléments de $\mathscr{C}(X)$ est noté $K(X)$. On définit de même $\mathscr{C}(Y)$ et $K(Y)$. On a alors :

Théorème 1. – *Soit* $H\subset E_1\otimes F'+E\otimes F_1'$ *s. e. d., et* $X=H\cap(E_1\otimes F')$, $Y=H\cap(E\otimes F_1')$. *Alors :*

$$H\in\mathscr{H}(\Lambda) \quad\Leftrightarrow\quad K(X)\cap K(Y)=\emptyset. \quad \square$$

Si H est l'espace cité dans l'exemple 4, et $E_1=\mathbb{R}e_1\oplus\mathbb{R}e_2$, $F'=\mathbb{R}f_1'\oplus\mathbb{R}f_2'$, on a $K(X)=\mathbb{R}^{+*}(v_{11}v_{22}-v_{12}v_{21})$ et $K(Y)=\mathbb{R}^{-*}(v_{11}v_{22}-v_{12}v_{21})$. Donc $H\in\mathscr{H}(\Lambda)$.

Lorsque $n=2$, le théorème 1 permet de n'étudier que le cas des espaces s. e. d. irréductibles; ceux-ci sont de dimension m et correspondent aux plans contenus dans $GL_m(\mathbb{R})\cup\{0\}$. La décomposition de Jordan nous réduit à l'étude d'un petit nombre de cas, dont aucun ne se trouve dans $\mathscr{H}(\Lambda)$. Finalement :

Corollaire 1. – (i) *si* $n=2$, *ou si* $m=2$, $\mathscr{H}_0(\Lambda)=\emptyset$;
(ii) *si* $n\geqq 3$ *et* $m\geqq 3$, $\mathscr{H}_0(\Lambda)\neq\emptyset$. $\square$

D'après [3], cela équivaut à :

Corollaire 2 (Terpstra, 1933 [4]). – (i) *supposons* $n=2$, *ou* $m=2$. *Pour toute forme quadratique* q *sur* $M_{n,m}(\mathbb{R})$, vérifiant (L–H.1), *il existe* $q_0\in Q_0(\Lambda)$ *telle que* $q\geqq q_0$;
(ii) *supposons* $n\geqq 3$ *et* $m\geqq 3$. *Il existe une forme quadratique* q *sur* $M_{n,m}(\mathbb{R})$ *vérifiant* (L–H.1) *telle que* $q-q_0\not\geqq 0$, *pour toute* $q_0\in Q_0(\Lambda)$. $\square$

IV. Application au calcul des variations. — Les résultats de notre Note précédente [3], appliqués à l'exemple 4, montrent l'existence de $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, la forme quadratique q_ε, définie ci-dessous, soit Λ-convexe non triviale :

$$q_\varepsilon(v) = (v_{11} - v_{23} - v_{32})^2 + (v_{12} - v_{31} + v_{13})^2 + (v_{21} - v_{13} - v_{31})^2 + v_{22}^2 + v_{33}^2 - \varepsilon \sum_{1 \leqq i,\, j \leqq 3} v_{ij}^2.$$

Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et $\vec{y} \in (H^1(\Omega))^3$, on pose :

$$I_{q_\varepsilon}(\vec{y}) = \int_\Omega q_\varepsilon(\operatorname{grad} y_1, \operatorname{grad} y_2, \operatorname{grad} y_3)\, dx.$$

La fonctionnelle I_{q_ε} est faiblement semi-continue inférieurement. Si L est une forme linéaire continue sur $(H^1(\Omega))^3$ et B un convexe fermé borné, le problème « Trouver $\vec{z} \in B$ tel que $I_{q_\varepsilon}(\vec{z}) + L(\vec{z}) \leqq I_{q_\varepsilon}(\vec{y}) + L(\vec{y})$ pour tout $\vec{y} \in B$ » admet alors une solution.

(*) Remise le 22 juin 1981.

[1] J. Hadamard, *Bull. Soc. Math. Fr.*, 30, 1902, p. 253-256 et 33, 1905, p. 73-80.

[2] F. Murat, *Proceedings of the International Meeting on Recent Methods in Nonlinear Analysis*, Rome, may 1978, Pitagora Editrice, Bologna, 1979, p. 245-256; L. Tartar, *Nonlinear Analysis and Mechanics* [*Heriot-Watt Symposium*, IV (*Research notes in Math.*, 39, Pitman, London, 1979, p. 136-212)]; L. Van Hove-Koninkl, *Ned. Akad. Wetenschap.* (*Proc. of the section of Sc.*, 50, 1947, p. 18-23).

[3] D. Serre, *Comptes rendus*, 282, série I, 1981, p. 785. Un article en préparation détaillera les démonstrations des résultats annoncées dans ces deux notes.

[4] Terpstra, *Math. Ann.*, 116, 1938, p. 166-180.

Laboratoire d'Analyse numérique,
C.N.R.S. et Université Paris-Sud, Bât. n° 425, 91405 *Orsay*.

FORMES QUADRATIQUES ET CALCUL DES VARIATIONS

Plan

Introduction.

Première partie : Formes quadratiques sur un cône.

I. Notations.

II. Préliminaires.

III. Formes Λ-convexes non-triviales.

IV. Exemples.

Dim $\varphi_o(\Lambda) = 1$; un faisceau de coniques.

Deuxième partie : La condition de Legendre-Hadamard.

I. L'origine du problème.

II. Sous-espaces sans élément décomposable. Caractérisation ; exemples ; maximalité ; réductibilité, dualité.

III. Les ensembles $\mathcal{H}(\Lambda)$ et $\mathcal{H}_o(\Lambda)$.

Eléments réductibles de $\mathcal{H}(\Lambda)$; existence de formes Λ-convexes non-triviales ; unicité $(n = m = 3)$.

IV. Une fonctionnelle quadratique f.s.c.i non polyconvexe.

Bibliographie.

Résumé : Le calcul des variations présente une difficulté notable lorsque plusieurs fonctions de plusieurs variables interviennent : on ne sait pas décrire explicitement toutes les fonctionnelles $\int_\Omega f(x, \vec{y}, \vec{\text{grad}}\ \vec{y})dx$ qui sont faiblement semi-continues inférieurement sur $W^{1,\infty}(\Omega)$.

Lorsque f est de classe C^2, on connait (Hadamard [1]) une condition nécessaire, appelée condition de Legendre-Hadamard. Cette condition est également suffisante (Van Hove [4]) lorsque f est une forme quadratique. Depuis, Murat [5] et Tartar [6] ont obtenu des résultats semblables pour d'autres fonctionnelles, par exemple $\int_\Omega f(x, \vec{y}, p, \vec{\text{rot}}\ \vec{y}, \vec{\text{grad}}\ p)dx$. Chaque cas conduit à l'étude des formes quadratiques qui prennent des valeurs positives sur un certain cône.

Cet article étudie ces formes quadratiques, en comparant notamment la quasiconvexité (Morrey [2]) et la polyconvexité (Ball [3]). Quelques exemples sont traités. On construit en particulier des fonctionnelles quadratiques $\int_\Omega q(\vec{\text{grad}}\ \vec{y})dx$ faiblement semi-continues inférieurement sur $(H_o^1(\Omega))^3$ $(\Omega \subset \mathbb{R}^3)$ qui ne se ramènent pas au cas $q \geqslant 0$.

Abstract : The purpose of this work is to compare the quasiconvexity of Morrey [2] and the polyconvexity of Ball [3] for quadratic forms (second part).

More generally, thinking about the compensated compactness theory (Murat [5] and Tartar [6]), we compare in the first part the following both properties for quadratic forms q :

α) $q(\lambda) \geqslant 0$ for all λ in a given cone Λ.

β) $q = q_o + q_+$, $q_o(\lambda) = 0$ for all $\lambda \in \Lambda$, and $q_+ \geqslant 0$ everywhere.

Finally, we construct quadratic functionals $\int_\Omega q(\vec{\text{grad}}\ \vec{y})dx$ weakly lower-semi-continuous on $(H_o^1(\Omega))^3$ $(\Omega \subset \mathbb{R}^3)$ without the possibility of choice $q \geqslant 0$.

Introduction.

Nous utilisons la théorie de la compacité par compensation, qui permet de traiter aussi bien le cas fondamental $\int_\Omega f(x,\vec{y},\overrightarrow{\text{grad}}\ \vec{y})dx)$ que le cas général des fonctionnelles dépendant de x , $\vec{y}(x)$, et d'une famille $\{L_i\vec{y}\ ;\ i\in I\}$ où les L_i sont des opérateurs différentiels du premier ordre à coefficients constants.

La théorie de la compacité par compensation est due à F. Murat [5] et L. Tartar [6]. Voici quelques rappels. Soient n,m,p trois nombres entiers $\geqslant 1$ et nmp nombres réels a_{ijk} , $1\leqslant i\leqslant n$, $1\leqslant j\leqslant m$, $1\leqslant k< p$. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et considérons l'espace fonctionnel suivant :

$$Z(\Omega) = \{\vec{u}\in (L^2(\Omega))^n\ ,\ 1\leqslant k\leqslant p\ ,\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\,a_{ijk}\in L^2(\Omega)\}\ .$$

Muni de la norme du graphe, $Z(\Omega)$ est un espace de Hilbert. Définissons les cônes V et Λ .

$$V = \{(\lambda,\xi)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\ ;\ 1\leqslant k\leqslant p\ ,\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\lambda_i\,\xi_j\,a_{ijk} = 0\}\ .$$

$$\Lambda = \{\lambda\in\mathbb{R}^n\ ;\ \exists\xi\in\mathbb{R}^m\setminus\{0\}\ ,\ (\lambda,\xi)\in V\}\ .$$

Le théorème principal de la compacité par compensation est le suivant :

Théorème (Murat-Tartar). Soit q une forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^n$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) Pour toute suite $\vec{u}_\nu \xrightarrow{\nu\to\infty} \vec{u}$ dans $Z(\Omega)$ faible et pour toute fonction test $\Phi\in\mathcal{D}(\Omega)$, $\Phi\geqslant 0$, on a :

$$\int_\Omega q(\vec{u}(x))\Phi(x)dx \leqslant \lim_{\nu\to+\infty}\ \text{Inf}\int_\Omega q(\vec{u}_\nu(x))\Phi(x)dx\ .$$

ii) Pour tout $\lambda\in\Lambda$, on a $q(\lambda)\geqslant 0$.

■

Le présent article traite des formes quadratiques vérifiant la condition ii) du théorème (c'est la quasiconvexité lorsque Λ est l'ensemble des matrices de rang 1 de $M_{n\times m}(\mathbb{R})$). La question principale est de savoir s'il existe une décomposition $q = q_+ + q_o$, q_o s'annulant sur Λ et $q_+ \geqslant 0$ partout (polyconvexité) . La réponse est donnée par le théorème 1.1 et l'on ramène le problème à l'étude de certains sous-espaces vectoriels ne rencontrant pas Λ . La première partie s'achève par l'étude de quelques exemples d'espaces $Z(\Omega)$.

La seconde partie concerne l'application des résultats qui précèdent au calcul des variations. Pour qu'une fonctionnelle définie par $\int_\Omega f(\vec{grad}\ \vec{y}(x))dx$ soit faiblement semi-continue inférieurement sur $(W^{1,\infty}(\Omega))^n$ $(\Omega\subset\mathbb{R}^n)$, il est nécessaire que l'application $t \longmapsto f(v+t\lambda)$ soit convexe sur $\mathbb{R}$ pour toute matrice λ de rang 1 et toute matrice v (condition de Legendre-Hadamard). Lorsque f est une forme quadratique, la condition est suffisante et équivaut à l'assertion ii) du théorème : $rg\ \lambda \leqslant 1 \Longrightarrow f(\lambda) \geqslant 0$. Nous verrons (théorèmes 2.2 et 2.3) que l'existence d'une décomposition $f = f_+ + f_o$ dépend des entiers m et n . Une méthode pour construire des formes quadratiques quasiconvexes non polyconvexes est donnée par le théorème 2.1.

Remarquons que ce cas est relié à la compacité par compensation par l'espace fonctionnel suivant :

$$Z(\Omega) = \{u \in M_{n\times m}(L^2(\Omega)) ;\ 1 \leqslant j,k \leqslant m\ ,\ 1 \leqslant i \leqslant n\ ,\ \frac{\partial u_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial u_{ik}}{\partial x_j} \in L^2(\Omega)\}\ .$$

PREMIERE PARTIE

FORMES QUADRATIQUES POSITIVES SUR UN CONE

I. NOTATIONS :

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension finie, de norme $|.|$ et $f(x) = |x|^2$ la forme quadratique fondamentale. Soit Λ un cône équilibré ($x \in \Lambda$, $\mu \in \underline{\underline{R}} \Rightarrow \mu x \in \Lambda$) de E, fermé et engendrant E.

Si X est un espace vectoriel réel, on note $Q(X)$ (respectivement $Q_+(X)$) l'ensemble des formes quadratiques définies sur X (resp. définies positives sur X).

L'ensemble des formes quadratiques sur E qui sont nulles sur Λ est un espace vectoriel noté $Q_0(\Lambda)$. Cet espace ne contient aucune forme semi-définie positive autre que la forme nulle.

Soient $q_1, q_2 \in Q(E)$. Nous écrivons $q_1 \succ q_2$ s'il existe $q_0 \in Q_0(\Lambda)$ telle que $q_1 - q_2 \geq q_0$ sur E. On définit ainsi une relation d'ordre sur $Q(E)$ compatible avec la structure d'espace vectoriel, et par passage au quotient on obtient une relation d'ordre strict dans $Q(E)/_{Q_0(\Lambda)}$.

Une forme $q \in Q(E)$ vérifiant $q(x) \geq 0$ pour tout $x \in \Lambda$ est dite *Λ-convexe*. Toute forme $q \succ 0$ est évidemment Λ-convexe, et nous dirons qu'une telle forme est *trivialement Λ-convexe* ; elle se met sous la forme $q = q_0 + q_+$ où $q_0 \in Q(\Lambda)$ et $q_+ \geq 0$ sur E.

II. PRELIMINAIRES :

Soit $q \in Q(E)$, et posons $\alpha(q) = \mathrm{Inf}\{\varepsilon \in \underline{\underline{R}} \; ; \; q + \varepsilon f \succ 0\}$. Il est clair que $\alpha(q)$ est fini. Soit $\varepsilon > \alpha(q)$, l'ensemble $K_\varepsilon = \{q_0 \in Q_0(\Lambda) \; ; \; q + \varepsilon f \geq q_0\}$ est un convexe fermé non vide. Puisque $q_0 \geq 0$ et $q_0 \in Q_0(\Lambda)$ implique $q_0 \equiv 0$, il ne contient pas de demi-droite affine. L'espace $Q_0(\Lambda)$ étant de dimension

finie, on en déduit que le convexe K est compact. Par conséquent, le convexe compact $\bigcap_{\varepsilon>\alpha(q)} K_\varepsilon = K_{\alpha(q)}$ est non vide et on a $q + \alpha(q)f \succ 0$. Il s'ensuit que l'ensemble $C(q) = \{r \in Q(E) ; r \geq 0 \text{ et } r \in q + \alpha(q)f + Q_0(\Lambda)\}$ est un convexe compact non vide.

Lemme 1.1 : Soit $r \in Q(E)$, $r \geq 0$ et $H = \mathrm{Ker}\, r$. On a $\alpha(r) \leq 0$ et :

$$\alpha(r) = 0 \Leftrightarrow \forall q_0 \in Q_0(\Lambda),\ q_{0|H} \text{ représente } 0 .$$

□

Démonstration :

Puisque $r \geq 0$, on a $r \succ 0$ et $\alpha(r) \leq 0$. Supposons que $\alpha(r) < 0$. Alors $r \geq q_0 - \alpha(q)f$ où $q_0 \in Q_0(\Lambda)$. Si $x \in H$, on a $q_0(x) \leq \alpha(q)f(x)$ donc $q_{0|H}$ ne représente pas 0.

Réciproquement, supposons qu'il existe q_0 dans $Q_0(\Lambda)$ telle que $q_{0|H} \in Q_+(H)$. Alors il existe (voir lemme 1.2 ci-dessous) un réel positif λ tel que $r + \lambda q_0 \in Q_+(E)$. On a alors $r + \lambda q_0 \geq \varepsilon f$ $(\varepsilon > 0)$ et $\alpha(q) \leq -\varepsilon < 0$.

□

Lemme 1.2 : Soit X un espace vectoriel réel de dimension finie, $q \in Q(X)$, $q \geq 0$ et $Y = \mathrm{Ker}\, q$. Soit $q_1 \in Q(X)$ telle que $q_{1|Y} \in Q_+(Y)$. Alors il existe un nombre réel $\mu > 0$ tel que $\mu q + q_1 \in Q_+(X)$.

□

Démonstration :

Raisonnons par l'absurde. Si le lemme est faux, il existe pour tout $n \in \underline{\mathbb{N}}$ un point $x_n \in X$ tel que $(nq + q_1)(x_n) = 0$. On peut supposer, après avoir choisi une norme de X, que x_n est de norme 1.

Comme $q(x_n) = -\frac{1}{n} q_1(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$, on a $\mathrm{dist}(x_n, Y) \to 0$. Mais alors :

$$0 = \varlimsup_{n\to\infty} (nq+q_1)(x_n) \geq \varlimsup_{n\to\infty} q_1(x_n) \geq \inf_{y\in Y} \frac{q_1(y)}{\|y\|} > 0 .$$

Ceci est absurde et le lemme est vrai.

□

Soient r_1, r_2 deux éléments de $C(q)$. $\theta \in]0,1[$ et $r_3 = \theta r_1 + (1-\theta) r_2$. Puisque $r_1, r_2 \geq 0$ on a $\mathrm{Ker}\, r_3 = \mathrm{Ker}\, r_1 \cap \mathrm{Ker}\, r_2$. Par conséquent les points internes r de $C(q)$ ont tous le même noyau $\mathrm{Ker}\, r$ que nous noterons $H(q)$, qui est minimal dans $\{\mathrm{Ker}\, r\ ;\ r \in C(q)\}$.

Voici quelques propriétés de $H(q)$:

Proposition 1.3 : Soit $q \in Q(E)$

1°/ Si $r \in C(q)$ n'est pas interne, on a $\mathrm{Ker}\, r \supset H(q)$.

2°/ La direction de l'espace affine engendré par $C(q)$ est $\vec{X}(q) = \{q_0 \in Q_0(\Lambda)\ ;\ H(q) \subset \mathrm{Ker}\, q_0\}$.

3°/ L'espace $H(q)$ est l'unique élément H de l'ensemble $\{\mathrm{Ker}\, r\ ;\ r \in C(q)\}$ tel que, pour tout $q_0 \in Q_0(\Lambda)$:

$$(q_0|_H \geq 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{Ker}(q_0|_H) \subset \mathrm{Ker}\, q_0) \Longrightarrow (q_0|_H \equiv 0). \qquad (*)$$

□

Démonstration :

1°/ Soit $r \in C(q)$ et supposons $\mathrm{Ker}\, r = H(q)$. Soit s interne à $C(q)$, on a $\mathrm{Ker}\, s = H(q)$. Notons $\pi : E \to E/H(q)$ la projection canonique. Nous avons $r = R \circ \pi$, $s = S \circ \pi$ où $R, S \in Q_+(E/H(q))$. Il existe donc un nombre réel $\lambda > 0$ tel que $R + \lambda(R-S)$ doit définie positive. Posons

$r_\lambda = [R + \lambda(R-S)] \circ \pi = r + \lambda(r-s)$. On a $r_\lambda \geq 0$. D'autre part, $r_\lambda \in q + \alpha(q)f + Q_0(\Lambda)$ donc $r_\lambda \in C(q)$. Cependant $r \in]r_\lambda, s[$. Puisque s est interne à $C(q)$, on en déduit que r est interne à $C(q)$.

2°/ Soit $q_0 \in \vec{X}(q)$. On peut écrire q_0 sous la forme $q_0 = \frac{r-s}{\lambda}$ où r et s sont dans $C(q)$. Puisque $H(q)$ est contenu dans $\mathrm{Ker}\, r$ et $\mathrm{Ker}\, s$, on a $H(q) \subset \mathrm{Ker}\, q_0$.

Réciproquement, soit $q_0 \in Q_0(\Lambda)$ telle que $H(q) \subset \mathrm{Ker}\, q_0$, et r un point interne de $C(q)$, $r = R \circ \pi$, $q_0 = Q \circ \pi$.

Puisque $R \in Q_+(E/H(q))$, $R + \lambda Q$ est définie positive pour tout réel λ suffisamment petit. Par conséquent, $r + \lambda q_0 \geq 0$ pour λ petit, et puisque $r + \lambda q_0 \in q + \alpha(q)f + Q_0(\Lambda)$ on a $r + \lambda q_0 \in C(q)$ et $q_0 \in \vec{X}$.

3°/ Soit $q_0 \in Q_0(\Lambda)$ telle que

$$q_0\big|_{H(q)} \geq 0$$

$$\mathrm{Ker}(q_0\big|_{H(q)}) \subset \mathrm{Ker}\, q_0$$

Soit $K = \mathrm{Ker}(q_0\big|_{H(q)})$. Puisque $K \subset \mathrm{Ker}\, q_0$, il existe une forme $Q \in Q(E/K)$ telle que $Q_0 = Q \circ \pi_K$ ($\pi_K : E \to E/K$ étant la projection canonique). Par hypothèse, la restriction de Q à H/K est définie positive. Soit $\bar{\omega} : E/K \to E/H$ la projection canonique, on a $\pi : \bar{\omega} \circ \pi_K$. De plus, si r est un point interne de $C(q)$, on a $q = r - \alpha(q)f + q_1$, $q_1 \in Q_0(\Lambda)$ et $r = R \circ \pi$, $R \in Q_+(E/H)$.

D'après le lemme 1.2, il existe un nombre réel λ tel que $R \circ \bar{\omega} + \lambda Q$ soit définie positive. Si $r' = r + \lambda q_0$, on a donc $r' \geq 0$, $K = \mathrm{Ker}\, r'$ et $r' \in q + \alpha(q)f + Q_0(\Lambda)$. Il s'ensuit que $r' \in C(q)$, et $K \supset H(q)$. On a donc $K = H(q)$, c'est-à-dire $q_0\big|_{H(q)} \equiv 0$. L'espace $H(q)$ vérifie donc la propriété (*).

Réciproquement, supposons que $s \in C(q)$ et que $H = \mathrm{Ker}\, s$ possède la propriété (*). Soit r un point interne de $C(q)$, et $q_0 = r - s$, $q_0 \in Q_0(\Lambda)$. On a $q_0\big|_H = r\big|_H \geq 0$, et $\mathrm{Ker}(q_0\big|_H) = \mathrm{Ker}(r\big|_H) = H(q)$ donc $\mathrm{Ker}(q_0\big|_H) \subset \mathrm{Ker}\, q_0$ puisque $H(q) \subset H = \mathrm{Ker}\, s$. On a donc $q_0\big|_H \equiv 0$, c'est-à-dire $r\big|_H \equiv 0$, et par conséquent $H = H(q)$.

□

III. FORMES Λ-CONVEXES NON TRIVIALES :

Rappelons qu'une forme quadratique Λ-convexe non-triviale est un élément q de $Q(E)$, prenant des valeurs positives ou nulles sur Λ, et vérifiant $\alpha(q) > 0$.

Nous introduisons deux classes de sous-espaces vectoriels de E :

$\mathcal{H}(\Lambda) = \{H$; H est un sous-espace vectoriel de E, $H \cap \Lambda = \{0\}$ et toute forme de $Q_0(\Lambda)$ représente zéro sur $H\}$.

$\mathcal{H}_0(\Lambda) = \{H$; $H \in \mathcal{H}(\Lambda)$ et H possède la propriété (*)$\}$.

Les ensembles $\mathcal{H}(\Lambda)$ et $\mathcal{H}_0(\Lambda)$ caractérisent les espaces Ker r ($r \in C(q)$) et $H(q)$ lorsque q est Λ-convexe non triviale :

Proposition 1.4 : Pour une forme quadratique $r \geq 0$ sur E, les conditions suivantes sont équivalentes :

i/ Il existe q dans $Q(E)$, Λ-convexe et non-triviale telle que $r \in C(q)$.

ii/ Ker $r \in \mathcal{H}(\Lambda)$.

□

Proposition 1.5 : Pour un sous-espace vectoriel H de E, les conditions suivantes sont équivalentes :

i/ Il existe q dans $Q(E)$, Λ-convexe et non-triviale telle que $H = H(q)$.

ii/ $H \in \mathcal{H}_0(\Lambda)$.

□

Remarquons que ces caractérisations ne dépendent pas du choix de la forme fondamentale f.

Démonstration de la proposition 1.4 :

i/ $\Longrightarrow$ ii/ Puisque $r \in C(q)$, on a $\alpha(r) = 0$ et d'après le lemme 1.1, toute forme de $Q_0(\Lambda)$ représente zéro sur Ker r .

D'autre part, $\alpha(q) > 0$. Soit alors $x \in \Lambda \setminus \{0\}$. On a

$r(x) = q(x) + \alpha(q)f(x) > q(x) > 0$, donc $x \notin$ Ker r. Finalement Ker $r \in \mathcal{H}(\Lambda)$

ii/ $\Longrightarrow$ i/ On suppose que Ker $r \in \mathcal{H}(\Lambda)$ et $r \geq 0$.

D'après le lemme 1.1, $\alpha(r) = 0$. Soit ε un nombre réel, $\varepsilon > 0$ et $q = r - \varepsilon f$. On a $\alpha(q) = \varepsilon > 0$ et $r \in C(q)$. Il nous reste à prouver que q est Λ-convexe, lorsque ε est assez petit.

Or $\Lambda \cap B_1$ (B_1 : sphère unité de f) est compacte et ne rencontre pas Ker r. Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que $r(x) \geq \varepsilon$ pour $x \in \Lambda \cap B_1$. On a alors $q = r - \varepsilon f \geq 0$ sur Λ .

□

Démonstration de la proposition 1.5 :

i/ $\Longrightarrow$ ii/ D'après la proposition 1.3, $H(q)$ possède la propriété (*). Soit $r \in C(q)$ telle que $H(q) =$ Ker r. On a $\alpha(q) > 0$ et $q|_\Lambda \geq 0$. On a donc, si $x \in \Lambda \setminus \{0\}$, $r(x) = q(x) + \alpha(q)f(x) > q(x) \geq 0$. Donc $\Lambda \cap$ Ker $r = \{0\}$, et Ker $r = H(q) \in \mathcal{H}_0(\Lambda)$.

ii/ $\Rightarrow$ i/ Soit r une forme quadratique ≥ 0 sur E telle que $H = \mathrm{Ker}\, r$. D'après la proposition 1.4, il existe $q \in Q(E)$, Λ-convexe non-triviale, telle que $r \in C(q)$. Enfin, d'après la proposition 1.3, on a $H = H(q)$.

□

Nous avons vu au paragraphe II que toute forme $q \in Q(E)$ s'écrit $q = r - \alpha(q)f + q_0$ où r peut être choisie arbitrairement dans $C(q)$, et où $q_0 \in Q_0(\Lambda)$. Réciproquement, si $q = r - \alpha f + q_0$ avec $r \geq 0$, $\alpha(r) = 0$, ε réel et $q_0 \in Q_0(\Lambda)$, on a $r \in C(q)$ et $\varepsilon = \alpha(q)$. On caractérise les formes Λ-convexes non triviales comme suit :

Théorème 1.1 :

Soit $q \in Q(E)$, $q = r - \varepsilon f + q_0$ avec $r \geq 0$, $\mathrm{Ker}\, r \in \mathcal{H}(\Lambda)$, $\varepsilon \in \underline{\underline{R}}$, $q_0 \in Q_0(\Lambda)$. Alors $\varepsilon = \alpha(q)$ et $r \in C(q)$. Pour que q soit Λ-convexe non-triviale, il faut et il suffit que :

$$0 < \alpha(q) \leq \operatorname{Inf}_{x \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{r(x)}{f(x)} \quad .$$

□

Démonstration :

La deuxième inégalité exprime que q est Λ-convexe, la première signifie que ce n'est pas trivialement.

□

Il découle de la proposition 1.3 ii/ que l'unicité de la décomposition $q = r - \varepsilon f + q_0$ (avec $r \geq 0$, $\alpha(r) = 0$, $q_0 \in Q_0(\Lambda)$) a lieu si et seulement si $X(q) = 0$. On en déduit :

Proposition 1.6 :

Les assertions suivantes sont équivalentes :

i/ $\mathcal{H}(\Lambda) = \mathcal{H}_0(\Lambda)$

ii/ Pour toute forme q, Λ-convexe et non-triviale, la décomposition $q = r - \varepsilon f + q_0$, avec $r \geq 0$, $\alpha(r) = 0$, $\varepsilon \in \underline{\underline{R}}$, $q_0 \in Q_0(\Lambda)$ est unique.

iii/ Pour tout $H \in \mathcal{H}_0(\Lambda)$ et toute $q_0 \in Q_0(\Lambda)$:

$$H \subset \mathrm{Ker}\, q_0 \Rightarrow q_0 \equiv 0$$

□

IV. EXEMPLES :

1. Cas dim $Q_0(\Lambda) = 1$:

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie ≥ 2 et q_0 une forme quadratique indéfinie sur E (c'est-à-dire prenant des valeurs positives et des valeurs négatives). Posons $\Lambda = q_0^{-1}(0)$. C'est un cône fermé engendrant E et on a $Q_0(\Lambda) = \underline{\underline{R}} q_0$.

Il est immédiat que $\mathcal{H}(\Lambda)$ est vide. Par conséquent toute forme Λ-convexe est triviale.

Ce cas intervient lorsqu'on considère l'espace bien connu (Murat [5], Tartar [6]) :

$$Z(\Omega) = \{(\vec{u},\vec{v})\} \in (L^2(\Omega))^{2n} \; ; \; \operatorname{div} \vec{u} \in L^2(\Omega), \; \operatorname{rot} \vec{v} \in L^2(\Omega)\} \quad .$$

On a alors $E = \underline{\underline{R}}^n \times \underline{\underline{R}}^n$ et $\Lambda = \{(\lambda,\eta) \in \underline{\underline{R}}^n \times \underline{\underline{R}}^n \; ; \; \lambda.\eta = 0\}$.
La forme quadratique q_0 est définie par $q_0(\lambda,\eta) = \lambda.\eta = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \eta_i$. La théorie de la compacité par compensation et ce qui précède nous montrent que :

Théorème 1.2 :

Soit q une forme quadratique définie sur $\underline{\underline{R}}^n \times \underline{\underline{R}}^n$, telle que l'application

$$(\vec{u},\vec{v}) \mapsto q(\vec{u},\vec{v})$$

$$Z(\Omega) \mapsto \mathcal{D}'(\Omega)$$

soit séquentiellement faiblement s.c.i. Il existe alors une forme quadratique $q_+ \geq 0$ sur $\underline{\underline{R}}^n \times \underline{\underline{R}}^n$ et un nombre réel t tels que

$$q(\lambda,\eta) = q_+(\lambda,\eta) + t\lambda.\eta \qquad \forall (\lambda;\eta) \in \underline{\underline{R}}^n \times \underline{\underline{R}}^n \quad .$$

□

2. Un faisceau de coniques :

Posons $E = \underline{\underline{R}}^3$, et choisissons quatre droites dont trois quelconques ne soient pas coplanaires, leur réunion sera le cône Λ .

L'espace $Q_0(\Lambda)$ est exactement le faisceau linéaire des coniques passant par Λ. Soit $\{q_1, q_2\}$ une base de $Q_0(\Lambda)$ et $\{C_1, C_2\}$ les deux coniques de E correspondantes. On a alors :

Théorème 1.3 :

On a $\mathcal{H}(\Lambda) = \mathcal{H}_0(\Lambda)$.

Soit H un sous-espace vectoriel de E. Alors $H \in \mathcal{H}(\Lambda)$ si et seulement si :

i/ dim H = 2 .

ii/ si D_1, D'_1 (resp^t D_2, D'_2) sont les droites d'intersection de H avec C_1 (resp^t C_2), les quatre droites D_1, D'_1, D_2, D'_2 sont réelles et distinctes deux à deux, et leur birapport dans cet ordre est strictement négatif.

□

On en déduit (proposition 1.6) que, la forme fondamentale f étant fixée, la décomposition $q = r - \varepsilon f + q_0$ des formes Λ-convexes non-triviales est unique.

Démonstration :

Soit H un élément de $\mathcal{H}(\Lambda)$. Puisque $H \cap \Lambda = \{0\}$, on a dim H ≤ 2, et puisque toute forme de $Q_0(\Lambda)$ représente 0 sur H, on a dim H = 2.
La proposition 1.3, 1°/ prouve alors que $\# C(q) = 1$ pour toute $q \in Q(E)$ et la proposition 1.6 achève de prouver que $\mathcal{H}(\Lambda) = \mathcal{H}_0(\Lambda)$.

Puisque $q_i|_H$ représente 0, l'intersection $D_i \cup D'_i = C_i \cap H$ est réelle. ∩

Supposons $D_1 = D'_1$. Alors $q_1|_H$ est semi-définie (positive par exemple), $D_1 = \mathrm{Ker}(q_1|_H)$. Et puisque $H \cap \Lambda = \{0\}$ on a $q_2|_{D_1} \neq 0$. D'après le lemme 1.2, il existe un nombre réel λ tel que $(q_1 + \lambda q_2)|_H$ Soit définie positive, ce qui contredit le fait que $H \in \mathcal{H}(\Lambda)$.

Par conséquent $D_1 \neq D'_1$, et de même $D_2 \neq D'_2$. De plus, puisque $H \cap \Lambda = \{0\}$, les quatre droites D_1, D'_1, D_2, D'_2 sont deux à deux distinctes. Considérons un repère de H dans lequel la forme quadratique $q_1|_H$ s'écrit xy. On a $q_2|_H = (x + \alpha y)(x + \beta y)$, les équations $x + \alpha y = 0$, $x + \beta y$ décrivant les droites D_2 et D'_2. La condition nécessaire et suffisante pour que la forme $(q_1 + tq_2)|_H$ représente zéro quelque soit le nombre réel t est que $\alpha\beta < 0$, ce qui équivaut à Birapport $[D_1, D'_1, D_2, D'_2] < 0$.

□

Application :

Choisissons $n = 3$, $m = p = 8$, et considérons l'espace fonctionnel suivant :

$$Z(\Omega) = \{u \in (L^2(\Omega))^3 \; ; \; \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_3}{\partial x_5} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \in L^2(\Omega)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_5} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_5} \in L^2(\Omega)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \frac{\partial u_3}{\partial x_6} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \in L^2(\Omega)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_6} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_1}{\partial x_6} \in L^2(\Omega)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_7} + \frac{\partial u_1}{\partial x_4} \in L^2(\Omega)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_7} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{\partial u_1}{\partial x_8} \in L^2(\Omega)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_4} - \frac{\partial u_3}{\partial x_8} - \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \in L^2(\Omega)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_8} + \frac{\partial u_3}{\partial x_4} - \frac{\partial u_1}{\partial x_7} \in L^2(\Omega) \}$$

Malgré les apparences, le calcul de Λ est aisé. En effet, en identifiant $\underline{\underline{R}}^3$ à $\underline{\underline{R}} \times \underline{\underline{C}}$ par $z = \lambda_2 + i\lambda_3$ et $\underline{\underline{R}}^8$ à $\underline{\underline{C}}^4$ par $y_K = \xi_K + i\xi_{K+4}$, $1 \leq K \leq 4$, on a $V = \{((\lambda_1, z), y) \; ; \; \lambda_1 Ay + zy = 0\}$,

où A est la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ainsi, le cône $\Lambda \setminus \{0\}$ est l'ensemble des couples (λ_1, z) de $\underline{\underline{R}} \times \underline{\underline{C}}$ tels que $\lambda_1 = 0$, et $-z/\lambda_1$ est valeur propre de la matrice A. Par conséquent, Λ est la réunion des quatre droites $(t, \pm t, 0)$, $(t, 0, \pm t)$.

L'espace $Q_0(\Lambda)$ est engendré par les deux formes quadratiques :

$$q_1(u) = u_2 u_3 \quad , \quad q_2(u) = u_3^2 + u_3^2 - u_1^2 \quad .$$

D'après le théorème 1.3, il existe des formes quadratiques Λ-convexes non-triviales. Par exemple, le plan d'équation $2u_2 - u_1 = 0$ appartient à $\mathcal{H}(\Lambda)$, et la forme $(2u_2 - u_1)^2 - \varepsilon(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)$ est Λ-convexe non-triviale si et seulement si $0 < \varepsilon \leq 1/2$ (théorème 1.1).

DEUXIEME PARTIE

La condition de Legendre-Hadamard

I. Origine du problème.

La condition nécessaire du deuxième ordre (stabilité) pour qu'un champ $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ défini sur $\mathbb{R}^n$ soit solution du problème de calcul des variations $\text{Inf} \int_\Omega f(x, \vec{y}, \vec{\text{grad}}\, \vec{y})dx$ est, d'après Hadamard [1] :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^i_{,\alpha} \, \partial y^j_{,\beta}} \lambda_i \lambda_j \mu_\alpha \mu_\beta \geqslant 0 \qquad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \ .$$

Cette condition affirme également qu'un point critique est un minimum local lorsque l'inégalité est stricte pour tous $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$. Elle est appelée condition de Legendre-Hadamard.

Plus généralement, cette condition est vérifiée en tout point (x, y, v) d'un ouvert U lorsque l'intégrale est faiblement semi-continue inférieurement sur l'espace des champs $\vec{y}$ de $(W^{1,\infty}(\mathbb{R}^m))^n$ tels que $(x, \vec{y}, \vec{\text{grad}}\, \vec{y}) \in U$ pour tout $x \in \Omega$. Enfin Van Hove (1947) montre que si f est une forme quadratique, la condition de Legendre-Hadamard est équivalente à la semi-continuité inférieure faible.

Pour une forme quadratique, cette condition s'écrit $q(v) \geqslant 0$ pour tout $v \in \Lambda$, où Λ est le cône des matrices de rang $\leqslant 1$ de $M_{n \times m}(\mathbb{R})$. C'est la quasiconvexité (Morrey [2]). Un cas particulier de quasiconvexité est (Ball [3]) la polyconvexité : $q = q_+ + q_o$ où $q_o = 0$ sur Λ et $q_+ \geqslant 0$ sur $M_{n \times m}(\mathbb{R})$. Terpstra [7] a montré que ces deux notions ne sont pas équivalentes si $n = m = 3$. Nous approfondissons cette question, en suivant la première partie de notre travail ; il s'agit de déterminer $\mathcal{H}(\Lambda)$ (ou $\mathcal{H}_o(\Lambda)$) et $Q_o(\Lambda)$.

Nous ne décrirons malheureusement pas entièrement $\mathcal{H}(\Lambda)$ ni $\mathcal{H}_o(\Lambda)$, sauf lorsque $n = 2$ ou $m = 2$. Le théorème 2.1 décrit une classe d'éléments de $\mathcal{H}(\Lambda)$, tandis que le théorème 2.3 prouve que $\mathcal{H}(\Lambda) = \mathcal{H}_o(\Lambda)$ lorsque $n = m = 3$ (c'est le cas qui est utilisé pour la mécanique des milieux continus).

Cependant, le calcul de $Q_o(\Lambda)$ est aisé :

Proposition 2.1 :

L'espace $Q_0(\Lambda)$ a pour éléments les formes quadratiques $q_0(v) = \sum_{1 \leq i,k \leq n} \sum_{1 \leq j,l \leq m} a^{ij}_{kl} v_{ij} v_k$, $a^{ij}_{kl} = a^{kl}_{ij}$, vérifiant de plus $a^{ij}_{kl} = - a$

□

Démonstration :

Soient E et F deux espaces vectoriels réels de dimension m et n, dont on choisit les bases $\{e_j\}$ et $\{f_i\}$. On identifie alors $M_{n \times m}(\mathbb{R})$ à L(E c'est-à-dire à $F \otimes E'$. Le cône Λ est l'ensemble des éléments de la forme $f \otimes e'$ ($f \in F$, $e \in E'$).

Soit $q_0 \in Q_0(\Lambda)$, ϕ_0 sa forme polaire, Φ_0 la forme quadrilinéaire définie sur $F \times E' \times F \times E'$ par $\Phi_0(y_1, x'_1, y_2, x'_2) = \phi_0(y_1 \otimes x'_1, y_1 \otimes x'_2)$.

Fixons un élément y de F. La forme bilinéaire $(x'_1, x'_2) \mapsto \Phi_0(y, x'_1, y, x'_2)$ est symétrique (comme ϕ_0) et alterné (car $\Phi_0(y, x', y, x') = q_0(y \otimes x') = 0$) donc nulle. La forme Φ_0 est donc alternée par rapport au couple (y_1, y_2). Soient alors a_{Kl}^{ij} les coefficients de q_0, $q_0 = \sum_{i,j,k,l} a_{kl}^{ij} v_{ij} v_{kl}$, $a_{kl}^{ij} = a_{ij}^{kl}$.

On a : $a_{kl}^{ij} = \Phi_0(f_i, e'_j, f_k, e'_1) = - \Phi_0(f_k, e'_j, j_i, e'_1) = - a_{il}^{kj}$.

La réciproque est immédiate.

□

La difficulté de l'étude de la condition de Legendre-Hadamard sera en fait le calcul de $\mathcal{H}(\Lambda)$ et $\mathcal{H}_0(\Lambda)$.

L'identification de $M_{n\times m}(\underline{\underline{R}})$ avec $F \otimes E'$ sera très utile par la suite. Puisque le cône Λ est l'ensemble des éléments $f \otimes e'$, nous dirons qu'un sous-espace vectoriel H de $F \otimes E'$ est *sans élément décomposable* (en abrégé s.e.d) si $H \cap \Lambda = \{0\}$. Nous commençons par l'étude de ceux-ci.

II. SOUS-ESPACES SANS ELEMENT DECOMPOSABLE :

a) Caractérisation :

Soit H un sous-espace vectoriel de $F \otimes E'$, π_H la projection canonique $F \otimes E' \to F \otimes E'/H$. La composée T_H de π_H et de l'application tensorielle $F \otimes E' \to F \otimes E'$ est bilinéaire. Il est clair que l'espace H est s.e.d si et seulement si $T_H(y, x') = 0 \Rightarrow (x' = 0 \text{ ou } y = 0)$.

Si H est s.e.d, et $y \in F \setminus \{0\}$, l'application linéaire $T_H(y, .) : E' \to F \otimes E'/H$ est injective, et $\dim H \leq \dim F \otimes E' - \dim E' = nm - m$.

Finalement :

Proposition 2.2 : Si H est s.e.d dans $F \otimes E'$, on a l'inégalité :

$$\dim H \leq nm - \mathrm{Sup}(n,m)$$

□

Si H est s.e.d et si $\dim H = nm - m$, alors pour tout $y \in F \setminus \{0\}$, l'application linéaire $T_H(y,.)$ est bijective. Soit $\{y_1, y_2\}$ une famille libre dans $F \setminus \{0\}$ et $A_i = T_H(y_i,.)$. L'application $A_1 + \lambda A_2$ est bijective pour

tout réel λ . Par conséquent, l'endomorphisme $A_2A_1^{-1}$ de E' n'a pas de valeur propre réelle, donc m est pair.

Proposition 2.2' : Si H est s.e.d dans $F \otimes E'$ et si m est impair, alors

$$\dim H \leq nm - m - 1$$

□

b) Exemples :

E 1 : Si $F = E' = \underline{\underline{C}}$ et $T_1(z,z') = zz'$ on a, en notation matricielle

$$H_1 = \operatorname{Ker} T_1^{\otimes} = \{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} ; (\alpha,\beta) \in \underline{\underline{R}}^2\} \quad .$$

La forme $q_0(v) = \det v$ engendre $Q_0(\Lambda)$, et sa restriction à H_1 est définie positive : $H_1 \notin \mathcal{H}(\Lambda)$. L'étude de l'exemple III.1 de la 1ère partie montre qu'en fait, $\mathcal{H}(\Lambda) = \mathcal{H}_0(\Lambda) = \emptyset$ si $n = m = 2$.

E 2 : Si $F = E' = \underline{\underline{H}}$ (corps des quaternions) et $T_2(q,q') = qq'$, on a :

$$H_2 = \operatorname{Ker} T_2^{\otimes} = \left\{ v \in M_{4\times 4}(\underline{\underline{R}}) \; ; \; \begin{array}{l} v_{11} - v_{22} - v_{33} - v_{44} = 0 \\ v_{12} + v_{21} + v_{34} - v_{43} = 0 \\ v_{13} + v_{31} + v_{42} - v_{24} = 0 \\ v_{14} + v_{41} + v_{23} - v_{32} = 0 \end{array} \right\}$$

L'espace H_2 est s.e.d, mais n'appartient pas à $\mathcal{H}(\Lambda)$ car la forme

$$q_0(v) = v_{11}(v_{22}+v_{33}+v_{44}) - v_{22}v_{33} - v_{33}v_{44} - v_{44}v_{22} + v_{43}(v_{12}+v_{21}+v_{34}) - v_{12}v_{21} - v_{21}v_{34} - v_{34}v_{12} + v_{24}(v_{13}+v_{31}+v_{42}) - v_{13}v_{31} - v_{31}v_{42} - v_{42}v_{13} + v_{32}(v_{14} + v_{41}+v_{23}) - v_{14}v_{41} - v_{41}v_{23} - v_{23}v_{14}$$ est dans $Q_0(\Lambda)$ et sa restriction

est dans $Q_0(\Lambda)$ et sa restriction à H_2 est définie positive.

Remarquons que l'espace H_2 rend optimale l'inégalité de la proposition 2.2 pour $n = m = 4$.

E 3 : Soit $F = E'$ l'espace des quaternions purs $xi + yj + zk$ et $T_3(q,q') = qq'$. L'espace $H_3 = \mathrm{Ker}\, T_3^{\otimes}$ est l'ensemble des matrices 3×3 symétriques de trace nulle. Il est s.e.d de dimension 5, ce qui rend optimale l'inégalité de la proposition 2.2'. Il n'appartient pas à $\mathcal{H}(\Lambda)$ puisque la restriction à H_3 de la forme

$$q_0(v) = v_{12}v_{21} - v_{11}v_{22} + v_{23}v_{32} - v_{22}v_{33} + v_{31}v_{13} - v_{33}v_{11} \quad (\in Q_0(\Lambda))$$

est définie positive.

E 4 : Soit H_4 l'espace des matrices 3×3 de la forme $\lambda I_3 + A$, A antisymétrique. La restriction à H_4 de la forme q_0 de l'exemple E 3 est définie négative, si bien que H_4 est s.e.d mais n'est pas dans $\mathcal{H}(\Lambda)$.

E 5 : Soit $F = \underline{\underline{R}}_{n-1}[X] = \{P \in \underline{\underline{R}}\, X \ ; \ d^\circ P \leq n-1\}$, $E' = \underline{\underline{R}}_{m-1}[X]$ et $T_5(P,Q) = PQ \in \underline{\underline{R}}_{n+m-2}[X]$. L'espace $H_5 = \mathrm{Ker}\, T_5^{\otimes}$ qui est s.e.d, est défini par les équations $\sum_{\substack{i+j=k \\ i\leq n \ j\leq m}} v_{ij} = 0$ pour tout $2 \leq k \leq n+m$.

E 6 : Soit $F = E' = \underline{\underline{R}}^3$ et H_6 l'espace des matrices de la forme

$$v = \begin{pmatrix} b+d & a-c & c \\ a+c & 0 & d \\ a & b & 0 \end{pmatrix} , \quad (a,b,c,d) \in \underline{\underline{R}}^4 .$$

Si $v \in H_6 \cap \Lambda$, alors $v_{11}v_{33} - v_{13}v_{31} = 0$, c'est-à-dire $ac = 0$. De même $bc = bd = ad = 0$. Par conséquent $(a,b) = (0,0)$, ou bien $(c,d) = (0,0)$. Si $(a,b) = (0,0)$ (on traite de même le cas $(c,d) = (0,0)$), alors $v = \begin{pmatrix} d & -c & c \\ c & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $v_{11}v_{22} - v_{12}v_{21} = 0$ c'est-à-dire $c = 0$. Enfin $v_{11}v_{23} - v_{13}v_{21} = 0$ donne $d = 0$ et $v = 0$.

L'espace H_6 est donc s.e.d. Nous verrons au paragraphe III que H_6 est un élément de $\mathcal{H}(\Lambda)$.

c) Maximalité :

Soit H un s.e.d. Nous dirons que H est *maximal* si pour tout K s.e.d , $H \subset K \Rightarrow H = K$. Tout s.e.d H est contenu dans un s.e.d maximal (et la démonstration de la proposition 2.3 ci-dessous donne une méthode pour construire un s.e.d maximal contenant un s.e.d donné), qui est dans $\mathcal{H}(\Lambda)$ si H appartient à $\mathcal{H}(\Lambda)$.

On caractérise les s.e.d maximaux comme suit :

Proposition 2.3 :

Soit H un s.e.d de $F \otimes E'$, et $T_H : F \times E' \to F \otimes E'/H$ l'application bilinéaire associée. L'espace H est maximal si et seulement si T_H est surjective.

□

Démonstration :

Soit H un s.e.d avec T_H surjective, et K un sous-espace s.e.d de $F \otimes E'$, $H \subset K$. On a $T_K = \pi_K^H \circ T_H$, où $\pi_K^H : F \otimes E'/H \to F \otimes E'/K$ est l'application canonique. Puisque T_H est surjective et $T_K(y,x') = 0 \Rightarrow (y = 0$ ou $x' = 0)$, il s'ensuit que π_K^H est injective, et $H = K$. L'espace H est donc maximal.

Inversement, supposons que T_H ne soit pas surjective et que $g \notin T_H(F \times E')$. Soit π la projection canonique $F \otimes E'/H \to (F \otimes E'/H)/\underline{\underline{R}}g$, et $T = \pi \circ T_H$. Il est clair que $T(f,e') = 0$ implique $f = 0$ ou $e' = 0$. L'espace $K = \operatorname{Ker} T^{\otimes}$ est donc s.e.d , et on a $H \subset K$, $H \neq K$, si bien que H n'est pas maximal.

□

Il est clair que les espaces H_1, H_2, H_3 sont maximaux. H_4 l'est également, ce qui est moins évident, et on a $\dim H_4 = 4 < 5 = \dim H_3$. Si n ou m est impair, l'application T_5 est surjective et H_5 est maximal et $\dim H_5 = (n-1)(m-1)$; cet exemple rend optimale l'inégalité de la proposition 2.4 ci-dessous pour n ou m impair. Si n et m sont pairs, le polynôme $P_{n+m} = 1 + X^{n+m-2}$ n'appartient pas à l'image de T_5 puisqu'il n'a pas de racine réelle. Si $\pi : \underline{\underline{R}}_{n+m-2}[X] \to \underline{\underline{R}}_{n+m-2}[X]/P_{n+m}$ est la projection canonique, on pose $K_5 = \operatorname{Ker}(\pi \circ T_H^{\otimes})$. C'est un s.e.d maximal, contenant H_5, qui dont la dimension est cette fois $(n-1)(m-1) + 1$.

Signalons à ce propos une question ouverte : l'espace K_5 est le seul exemple, parmi ceux que nous avons rencontrés, dont nous ne savons pas s'il appartient ou non à $\mathcal{H}(\Lambda)$.

Proposition 2.4 :

Soit M un s.e.d maximal de $F \otimes E'$. Alors

$$\dim H \geq (n-1)(m-1) \quad .$$

□

Démonstration :

Puisque l'application T_H est surjective, elle possède des valeurs régulières (lemme de Sard) ; soit (f_0, e'_0) l'une d'elles. L'application linéaire $(f,e') \overset{L}{\mapsto} T(f_0,e') + T(f,e'_0)$ est surjective, et $(f_0,-e'_0) \in \operatorname{Ker} L$. Par conséquent $\dim (F \times E'/H) = \operatorname{rang}(L) \leq n + m - 1$, et on en déduit $\dim H \geq (n-1)(m-1)$.

□

d) Réductibilité - Dualité :

Soit H un sous-espace vectoriel de $F \otimes E'$. Nous dirons que H est *réductible* s'il existe des hyperplans F_1 et E'_1 de F et E tels que $H \subset F \otimes E'_1 + F_1 \otimes E'$ (puisqu'il s'agit d'espaces vectoriels, $F \otimes E'_1$ s'identifie naturellement à un sous-espace vectoriel de $F \otimes E'$). Si H n'est pas réductible, nous dirons qu'il est *irréductible*.

Dans la dualité entre $E \otimes F'$ et $F \otimes E'$, l'espace orthogonal à H est noté H° . C'est un sous-espace vectoriel de $E \otimes F'$, et on a $H = (H^\circ)^\circ$. Dire que H est réductible et que $H \subset F \otimes E'_1 + F_1 \otimes E'$ équivaut à dire que $e_1 \otimes f'_1 \in H^\circ$, où $\langle e', e_1 \rangle = 0$ (respectivement $\langle f'_1, f \rangle = 0$) est une équation qui définit E'_1 (resp. F_1). Finalement :

Proposition 2.5 :

Soit H un sous-espace vectoriel de $F \otimes E'$. Alors H est irréductible (resp. s.e.d) si et seulement si H° est s.e.d (resp. irréductible).

□

Lorsque H est s.e.d réductible, les bornes des propositions 2.2 et 2.2' ne peuvent être atteintes :

Proposition 2.6 :

Soit H un s.e.d réductible de $F \otimes E'$. Alors $\dim H \leq nm - \operatorname{Sup}(n,m) - 1$. Si de plus m est impair, alors $\dim H \leq nm - \operatorname{Sup}(n,m) - 2$.

□

Démonstration :

Ecrivons $H \subset F_1 \otimes E' + F \otimes E'_1$ et soit $\bar{H} = H \cap (F_1 \otimes E')$. On a $\mathrm{Codim}_H \bar{H} \leq \dim(F_1 \otimes E' + F \otimes E'_1) - \dim(F_1 \otimes E') = m - 1$, donc $\dim H \leq \dim \bar{H} + m - 1$. Cependant $\bar{H}$ est s.e.d dans $F_1 \otimes E'$ et on a (propositions 2.2 et 2.2') $\dim \bar{H} \leq (n-1)m - m$, et $\dim \bar{H} \leq (n-1)m - m - 1$ si m est impair , ce qui prouve la proposition 2.6.

□

Exemples :

L'espace H_6 est réductible car $v_{33} = 0$ pour tout $v \in H_6$. De même l'espace H_5 est réductible car $v_{11} \equiv 0$ sur H_5 ; par contre K_5 est irréductible. La proposition 2.6 prouve que H_1, H_2, H_3 sont irréductibles. Si on choisit le produit scalaire $A.B = \mathrm{Tr}(AB)$ sur $M_{3\times 3}(\underline{\underline{R}})$, l'orthogonal de H_4 est H_3 qui est s.e.d, et H_4 est irréductible (proposition 2.5).

III. LES ENSEMBLES $\mathcal{H}(\Lambda)$ ET $\mathcal{H}_0(\Lambda)$:

Rappelons que la vacuité de $\mathcal{H}(\Lambda)$, ou celle de $\mathcal{H}_0(\Lambda)$ équivaut à la trivialité de toutes les formes Λ-convexes sur $F \otimes E'$. L'espace $\mathcal{H}(\Lambda)$ est donc vide si et seulement si $\mathcal{H}_0(\Lambda)$ est vide ; de plus (Λ) $_0(\Lambda)$.

Dans un premier temps, nous ne considérons donc que l'ensemble $\mathcal{H}(\Lambda)$.

a) Eléments réductibles de $\mathcal{H}(\Lambda)$:

Soit $H \subset F_1 \otimes E' + F \otimes E'_1$ un s.e.d réductible de $F \otimes E'$, où F_1 et E'_1 sont des sous-espaces vectoriels stricts de F et E' (mais pas nécessairement des hyperplans). Les sous-espaces $X = H \cap (F_1 \otimes E')$ et $Y = H \cap (F \otimes E'_1)$ sont s.e.d dans $F_1 \otimes E'$ et $F \otimes E'_1$. Soit $C(X)$ le cône ouvert convexe (éventuellement vide) dont les éléments sont les formes quadratiques r définies sur $F_1 \otimes E'$, nulles sur les éléments $f_1 \otimes e'$ ($f_1 \in F_1$) et dont la restriction $r\big|_X$ est définie positive ($C(X)$ est vide lorsque $X \in \mathcal{H}(\Lambda_{n_1,m})$). Le cône des restrictions à $F_1 \times E'_1$ des éléments de $C(X)$ est noté $K(X)$. On définit de même $C(Y)$ et $K(Y)$. On caractérise les éléments réductibles de $\mathcal{H}(\Lambda)$ de la façon suivante :

Théorème 2.1 :

Soit $H \subset F_1 \otimes E' + F \otimes E'_1$ un s.e.d réductible de $F \otimes E'$. Alors

$$H \in \mathcal{H}(\Lambda) \Leftrightarrow K(X) \cap K(Y) = \emptyset \ .$$

□

Exemple :

Dans le cas de H_6, prenons les sous-espaces F_1 et E_1' d'équations respectives $y_3 = 0$ et $x_3' = 0$. Alors l'espace X est formé des matrices $\begin{pmatrix} d & -c & c \\ c & 0 & d \end{pmatrix}$, $(c,d) \in \underline{\underline{R}}^2$, et Y est l'espace des matrices $\begin{pmatrix} b & a \\ a & 0 \\ a & b \end{pmatrix}$, $(a,b) \in \underline{\underline{R}}^2$. On calcule aisément que $K(X)$ et $K(Y)$ sont les demi-droites $]0,+\infty[q_0$ et $]-\infty,0[q_0$ où $q_0(v) = v_{11}v_{22} - v_{12}v_{21}$. Puisque $K(x) \cap K(Y)$ est vide, le théorème montre que $H_6 \in \mathcal{H}(\Lambda)$.

Démonstration du théorème :

Supposons que $H \notin \mathcal{H}(\Lambda)$. Soit $q_0 \in Q_0(\Lambda)$ telle que $q_0\big|_H$ soit définie positive, et posons $r = q_0\big|_{F_1 \otimes E'}$, $s = q_0\big|_{F \otimes E_1'}$, $t = q_0\big|_{F_1 \otimes E_1'}$. On a $r \in C(X)$, $s \in (Y)$, dont $t \in K(X) \cap K(Y)$ qui est ainsi non vide.

Réciproquement, supposons que $K(X) \cap K(Y)$ n'est pas vide, et soit t un élément de cette intersection, $t = r\big|_{F_1 \otimes E_1'} = s\big|_{F_1 \otimes E_1'}$, $r \in C(X)$, $s \in C(Y)$.

Par un choix convenable des bases de E et F nous pouvons supposer que $F_1 \otimes E'$ est l'ensemble des matrices de $M_{n\times m}(\underline{\underline{R}})$ dont les n_0 dernières lignes sont nulles et que $F \otimes E_1'$ contient les matrices dont les m_0 dernières colonnes sont nulles. En particulier $v \in H$ implique $v_{ij} = 0$ si $i > n - n_0$ et $j > m - m_0$.

Les formes r et s s'écrivent alors :

$$r(v) = \sum_{i,k\le n} \sum_{j,l\le m-m_0} r_{ij}^{kl} v_{ij} v_{kl}$$

$$s(v) = \sum_{i,k\le n-n_0} \sum_{j,l\le m} s_{ij}^{kl} v_{ij} v_{kl}$$

où $r_{ij}^{kl} = r_{kl}^{ij} = -r_{kj}^{il}$, $s_{ij}^{kl} = s_{kl}^{ij} = -s_{kj}^{il}$ (proposition 2.1) et $r_{ij}^{kl} = s_{ij}^{kl}$ pour $i,k \le n - n_0$ et $j,l \le m - m_0$. Posons alors $q(v) = \sum_{i,k\le n} \sum_{j,l\le m} q_{ij}^{kl} v_{ij} v_{kl}$ où q_{ij}^{kl} est égal à r_{ij}^{kl} si $j,l \le m - m_0$, à s_{ij}^{kl} si $i,k \le n - n_0$, et à 0 dans les autres cas.

La forme q appartient à $Q_0(\Lambda)$ (proposition 2.1) et on a $q\big|_{F_1 \otimes E'} = r$, $q\big|_{F \otimes E'_1} = s$.

Pour la suite de la démonstration, nous avons besoin du résultat suivant :

Lemme 2.1 :

Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie, de dual V'. Soient V_1 et V_2 deux sous-espaces vectoriels de V, dont les orthogonaux sont V_1° et V_2°. Soit enfin Q une forme quadratique sur V telle que $Q\big|_{V_i} \in Q_+(V_i)$, $i = 1.2$.

Alors il existe une forme quadratique R sur V s'écrivant $R = \sum_{\mu=1}^{N} 1_\mu^1 1_\mu^2$, $1_\mu^i \in V_i^\circ$, telle que $Q + R \in Q_+(V)$.

□

Démonstration du lemme 2.1 :

Puisque $Q\big|_{V_1 \cap V_2}$ est définie positive, donc non dégénérée, il existe une base $\{w_k \ ; \ 1 \le k \le \dim V\}$ de V ayant les propriétés suivantes :

i/ $\{w_k \ ; \ 1 \le k \le a\}$ est une base de $V_1 \cap V_2$

ii/ $\{w_k \ ; \ a+1 \le k \le b\}$ est une base de $V_1^\perp \cap V_2$ ($V_i^\perp$ désigne l'orthogonal de V_i relativement à Q).

iii/ $\{w_k \ ; \ b+1 \le k \le c\}$ est une base de $V_1 \cap V_2^\perp$.

iv/ $\{w_k \ ; \ a+1 \le k \le \dim V\}$ est une base de $V_1^\perp + V_2^\perp$.

Dans cette base, la matrice de Q s'écrit (par blocs) :

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ 0 & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ 0 & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{pmatrix} \quad , \ {}^t A_{ji} = A_{ij}$$

Puisque $Q|_{V_i}$ est définie positive ($i = 1,2$), les matrices A_{11}, A_{22}, A_{33} sont symétriques définie positives. Soit alors R la forme quadratique sur V dont la matrice est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -A_{23} & -A_{24} \\ 0 & -A_{32} & 0 & -A_{34} \\ 0 & -A_{42} & -A_{43} & B-A_{44} \end{pmatrix}$$

où B est symétrique définie positive. Cette forme quadratique est de la forme $R = \sum_{\mu=1}^{N} l_\mu^1 l_\mu^2$, $l_\mu^i \in V_i^0$, et la forme $Q + R$ est définie positive, ce qui prouve le lemme.

□

Appliquons le lemme 2.1 aux données suivantes : $V = H$, $V_1 = X$, $V_2 = Y$, $Q = q|_H$. La forme quadratique R définie sur H ainsi obtenue est de la forme $R = \sum_{\mu=1}^{N} l_\mu^1 l_\mu^2$ où l_μ^1 (resp. l_μ^2) est une forme linéaire sur H s'annulant sur X(resp. Y). Puisque $X = H \cap (F_1 \otimes E')$, chaque forme l_μ^1 admet un prolongement à $F \otimes E'$ appartenant à $E \otimes F_1^0$ où F_1^0 est l'orthogonal de F_1 dans F'. De même l_μ^2 est la restriction d'un élément de $E_1'^0 \otimes F'$. Quitte à décomposer chaque l_μ^i par rapport au rang, on peut donc supposer que $l_\mu^1 = e_{1\mu} f'_{1\mu}$, $l_\mu^2 = e_{2\mu} \otimes f'_{2\mu}$ où $f'_{1\mu} \in F_1^0$ et $e_{2\mu} \in E_1'^0{}_N$. Considérons alors la forme quadratique q' définie sur $F \otimes E'$ par $q' = \sum_{\mu=1} [e_\mu f'_{1\mu} \cdot e_{2\mu} \otimes f'_{2\mu} - e_{1\mu} \otimes f'_{2\mu} \cdot e_{2\mu} \otimes f'_{1\mu}]$.

Il est clair que $q' \in Q_0(\Lambda)$ et que $q'|_H = R$ puisque $e_{2\mu} \otimes f'_{1\mu}|_H = 0$, $1 \le \mu \le N$. Finalement, la forme $q_0 = q + q'$ est dans $Q_0(\Lambda)$ et sa restriction à H est définie positive. L'espace H n'est donc pas un élément de $\mathcal{H}(\Lambda)$, ce qui achève de prouver le théorème.

□

b) Existence de formes Λ-convexes non triviales (Terpstra 1933) :

Les théorèmes 2.2 et 2.3 sont dus à Terpstra [7] qui les démontra de manière totalement différente.

Puisque l'espace H_6 est un élément de $\mathcal{H}(\Lambda)$ pour $n = m = 3$, les résultats de la première partie prouvent que :

Théorème 2.2 :

Si $n, m \ge 3$, il existe des formes quadratiques sur $F \otimes E'$ qui sont Λ-convexes non-triviales.

□

En particulier, et en utilisant H_6 pour $n = m = 3$, la forme $r(v) = v_{22}^2 + v_{33}^2 + (v_{11} - v_{23} - v_{32})^2 + (v_{12} - v_{31} + v_{13})^2 + (v_{21} - v_{13} - v_{31})^2$ vérifie $r \geq 0$ et $\operatorname{Ker} r = H_6 \in \mathcal{H}(\Lambda)$ c'est-à-dire $\alpha(r) = 0$. Si f est une forme quadratique définie positive sur $F \times E'$, suffisamment petite pour que $r - f$ soit Λ-convexe, la forme $r - f$ est non-triviale (théorème 1.1).

Le cas $n = 2$ (ou $m = 2$) est radicalement différent :

Théorème 2.3 : Si $n = 2$ (ou si $m = 2$) toute forme quadratique Λ-convexe sur $F \otimes E'$ est triviale, c'est-à-dire est de la forme $q_+ + q_0$, $q_+ \geq 0$, $q_0 \in Q_0(\Lambda)$.

□

Démonstration :

Par transposition, nous pouvons considérer le cas $n = 2$ uniquement. Nous montrons par récurrence sur m que $\mathcal{H}(\Lambda)$ est vide. Le cas $m = 2$ étant résolu dans l'exemple 1 de la 1ère partie, nous supposons que m est au moins égal à 3, et que le théorème est vrai jusqu'à l'ordre $m-1$. Soit H un espace s.e.d de $F \otimes E'$.

1er cas : H est réductible, $H \subset F \otimes E_1' + F_1 \otimes E'$. Puisque le théorème est vrai à l'ordre $m-1$, l'espace $Y = H \cap (F \otimes E_1')$ n'appartient pas à $\mathcal{H}(\Lambda_{2,m-1})$, par conséquent $C(Y)$ et $K(Y)$ sont non vides. Comme $K(Y) \subset Q_0(\Lambda_{1,m-1}) = \{0\}$, on a $K(Y) = \{0\}$. D'autre part, $X = H \cap (F_1 \otimes E')$ est s.e.d et ne contient que des matrices $1 \times m$, donc $X = \{0\}$ et $K(X) = \{0\}$. On en déduit (théorème 2.1) que H n'appartient pas à $\mathcal{H}(\Lambda)$.

2ème cas : H est irréductible. Dans ce cas H° est également s.e.d et en utilisant les propositions 2.2, 2.2' et l'égalité $\dim H + \dim H^\circ = 2m$ on obtient que m est pair et que $\dim H = m$.

Soit une base de F et $\theta_i (i = 1,2)$ l'isomorphisme $T_H(f_i,.) : F \otimes E' \to F \otimes E'/H$. Puisque $T_H(f,.)$ est un isomorphisme pour tout f non nul dans F, l'application $\theta + \lambda I_E$, (où l'on a posé $\theta = \theta_2 \circ \theta_1^{-1}$) est un automorphisme de E' pour tout nombre réel λ. Par conséquent θ n'a pas de valeur propre réelle et il existe un plan stable P dans E pour ${}^t\theta$. La matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de ${}^t\theta|_P$ dans une base arbitrairement choisie n'a pas de valeur propre réelle. Identifiant alors $F \times E'/H$ et E' par θ_1, on a $T_H(x,y) = x_1 y + x_2 \theta y$ pour tout $x \in F$ et $y \in E'$. Par conséquent tout élément v de H vérifie $v_{11} + av_{21} + cv_{22} = v_{12} + bv_{21} + dv_{22} = 0$, et la forme quadratique $q(v) = v_{11}v_{22} - v_{12}v_{21}$ est semi-définie (positive si $b > 0$, négative sinon) sur H.

Soit K le noyau de $q|_H$; on a $K = H \cap F \otimes P^\circ$, et l'hypothèse de récurrence appliquée à l'ordre $m-2$ assure l'existence d'une forme quadratique q_1 définie sur $F \otimes P^\circ$, nulle sur $\Lambda_{2,m-2}$, dont la restriction $q_1|_K$ est définie positive. Il existe alors (lemme 1.2) un nombre réel ρ tel que la restriction de $q_0 = q_1 \overset{\perp}{\oplus} \rho\, q_1$ à l'espace H soit définie positive. Puisque q_0 est nulle sur Λ H n'appartient pas à $\mathcal{H}(\Lambda)$, qui est donc vide.

□

c) Particularités du cas $n = m = 3$. Unicité :

Nous étudions maintenant le cas intervenant en élasticité non linéaire, $n = m = 3$.

Lemme 2.2 :

Si $n = m = 3$ et si $H \in \mathcal{H}(\Lambda)$, alors $\dim H = 4$ ou 5. Si de plus H est réductible, alors $\dim H = 4$.

□

Démonstration :

D'après les propositions 2.2 et 2.2', on a $\dim H \leq 5$, et si H est réductible $\dim H \leq 4$.

Supposons que $\dim H \leq 3$ alors $\dim H^\circ \geq 6$ et H° ne peut être s.e.d. Donc H est réductible. On supposera que $v_{33} = 0$ pour tout v dans H. Nous supposerons également, ce qui suffit à la démonstration, que H est minimal dans $\mathcal{H}(\Lambda)$. Dans ce cas (lemme 1.2) il n'existe pas de forme $q_0 \in Q_0(\Lambda)$ dont la restriction à H soit semi-définie positive, non nulle. On en déduit que si $e_3 \otimes f'$ et $e \otimes f'_3$ coïncident sur H, alors ces restrictions sont nulles ; en effet la forme

$e_3 \otimes f'.e \otimes f'_3 - e_3 \otimes f'_3.e \otimes f'$ est dans $Q_0(\Lambda)$ et sa restriction à H est semi-définie positive. Finalement l'un des espaces vectoriels $\{e_3 \otimes f'\big|_H \; ; \; f' \in F'\}$ ou $\{e \otimes f'_3\big|_H \; ; \; e \in E\}$ est de dimension inférieure ou égale à 1 et on a $H \subset F_1 \otimes E' + F \otimes E'_1$ où l'un des deux espaces F_1 et E'_1 est une droite, l'autre étant un plan.

D'après le théorème 2.2, $C(X)$ et $C(Y)$ sont non vides, donc $K(X) = K(Y) = Q_0(\Lambda_{1,2}) = \{0\}$. Par conséquent (théorème 2.1) H n'appartient pas à $\mathcal{U}(\Lambda)$, ce qui achève de prouver le lemme.

□

Nous montrons maintenant que la décomposition (au sens de la proposition 1.6) des formes Λ-convexes non-triviales est unique, la forme fondamentale f étant fixée.

Théorème 2.4 :

Si $n = m = 3$, alors pour toute forme quadratique q Λ-convexe non-triviale, la décomposition $q = r - \varepsilon f + q_0$, $r \geq 0$, $\alpha(r) = 0$, $\varepsilon \in \underline{\underline{R}}$, $q_0 \in Q_0(\Lambda)$ est unique.

□

Démonstration :

D'après la proposition 1.6, il suffit de prouver que pour tout $H \in \mathcal{U}(\Lambda)$ et toute forme $q_0 \in Q_0(\Lambda)$ on a $H \subset \mathrm{Ker}\, q_0 \Rightarrow q_0 \equiv 0$.

Soient donc $H \in \mathcal{U}(\Lambda)$, $q_0 \in Q_0(\Lambda)$ tels que $H \subset \mathrm{Ker}\, q_0$. Si $T_H : F \times E' \to F \otimes E'/H = G$ est l'application bilinéaire associée à H, on a $q_0 = Q \circ T_H^{\otimes}$ et $Q \circ T_H = 0$.

Si H est maximal, T_H est surjective (proposition 2.3) , $Q \equiv 0$ et $q_0 \equiv 0$.

Si H n'est pas maximal, alors $\dim H = 4$ (proposition 2.2' et lemme 2.2) et $\dim G = 5$. Soit (ρ,τ) la signature de la forme Q et e' un élément non nul de E'. Puisque H est s.e.d, l'image de F par $T_H(.,e')$ est un sous-espace vectoriel de G de dimension 3, sur lequel Q s'annule. Par conséquent $\mathrm{Sup}(\rho,\tau) \leq 5 - 3 = 2$.

Cependant (ρ,τ) est également la signature de q_0. Si $q_0 \not\equiv 0$, on a donc $\rho \geq 1$, $\tau \geq 1$. Supposons que $\tau \equiv 1$ et écrivons $q_0 = Y_1^2 + \ldots + Y_r^2 - X^2$ où les formes linéaires $X, Y_1, \ldots, Y_r$ sont indépendantes sur $F \times E'$. La décomposition par rapport au rang permet d'écrire X sous la forme $\langle X, v \rangle = v_{11} + \ldots + v_{ss}$. Soit $\pi = \operatorname{Ker} X$ et $v \in \pi$. Alors $v = \bar{v} + \sum_{i \neq j} w^{ij}$ où $w^{ij}_{kl} = 0$ si $(k,l) \neq (i,j)$ et où l'on a posé

$$\bar{v} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{22} & & v_{ss} & \\ & & & & 0 \\ v_{11} & v_{22} & & v_{ss} & \\ & & 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

Les matrices $\bar{v}$ et w^{ij} sont dans $\pi \cap \Lambda$, si bien que $\pi \cap \Lambda$ engendre π. Par conséquent il existe un élément v de $\pi \cap \Lambda$ tel que $\langle Y_1, v \rangle$ soit non nul, et on a $q_0(v) > 0$, ce qui contredit $q_0 \in Q_0(\Lambda)$.

On a donc $\tau = 2$, et de même $\rho = 2$, si $q_0 \not\equiv 0$, et on écrit $q_0 = X_1X_2 - X_3X_4$ où les X_i sont des formes linéairement indépendantes sur $F \otimes E'$. Soit w^i le représentant de X^i dans $L(F,E)$, on a $\langle X_i, f \otimes e' \rangle = \langle e', w_i f \rangle$ et puisque $q_0 \in Q_0(\Lambda)$:

$$\langle e', w^1 f \rangle \langle e', w^2 f \rangle = \langle e', w^3 f \rangle \langle e', w^4 f \rangle \qquad (e',f) \in E' \times F \qquad (1).$$

Chaque forme bilinéaire $(e',f) \to \langle e', w^i f \rangle$ est un polynôme sur $E' \times F$, qui est irréductible si $\operatorname{rg} w^i \geq 2$. Vu l'indépendance linéaire des X^i, on en déduit $\operatorname{rg} w^i = 1$ pour tout $i \leq 4$ (car l'anneau $\underline{R}[x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3]$ est factoriel). On a alors $w^i = e_i \otimes f_i'$ et l'égalité (1) entraîne

$$\langle e', e_1 \rangle \langle e', e_2 \rangle = c \langle e', e_3 \rangle \langle e', e_4 \rangle ,$$

et

$$\langle f_1', f \rangle \langle f_2', f \rangle = c^{-1} \langle f_3', f \rangle \langle f_4', f \rangle .$$

pour tout (e',f) dans $E' \times F$. Il est alors immédiat de déterminer e_3, e_4, f_3', f_4' en fonction de e_1, e_2, f_1', f_2' et on trouve

$$q_0(v) = e_1 \otimes f_1' . e_2 \otimes f_2' - e_1 \otimes f_1' . e_2 \otimes f_1' .$$

Puisque $H \subset \mathrm{Ker}\, q_0$, on a $H \subset f_3 \otimes E' + F \otimes e_3'$.

Mais $H \cap (f_3 \otimes E') = \{0\}$ car H est s.e.d , donc $\dim H \leq 5 - 3 = 2$, ce qui contredit le fait que $H \in \mathcal{H}(\Lambda)$. On avait donc en fait $q_0 \equiv 0$.

□

IV. UNE FONCTIONNELLE QUADRATIQUE F. S.C.I NON-TRIVIALE :

Pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, la forme quadratique $q_\varepsilon(v) = r(v) - \varepsilon \sum_{i,j=1}^{3} |v_{i,j}|^2$, définie sur $M_{3\times 3}(\underline{\underline{R}})$, est Λ-convexe non triviale.
On en déduit que la fonctionnelle

$$\vec{u} \xrightarrow{F} \int_\Omega \{(\frac{\partial u_2}{\partial x_2})^2 + (\frac{\partial u_3}{\partial x_3})^2 + (\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3})^2$$

$$+ (\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1})^2 + (\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1})^2 - \varepsilon\, |\mathrm{grad}\, \vec{u}|^2 \}\, dx$$

est faiblement semi-continue inférieurement sur $(H^1(\Omega))^3$ (avec Ω ouvert de $\underline{\underline{R}}^3$).
Si B est un convexe fermé borné de $(H^1(\Omega))^3$, le problème

(P) Trouver $\vec{u} \in B$ tel que, pour tout $\vec{v} \in B$ $F(\vec{u}) \leq F(\vec{v})$

admet donc une solution. La restriction de F au sous-espace $(H_0^1(\Omega))^3$ est convexe bien que cette restriction ne puisse être mise sous la forme $\int_\Omega q(\mathrm{grad}\, \vec{u}(x))dx$ avec $q \geq 0$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Hadamard
- Sur une question de calcul des variations. Bull. Soc. Math. France 30 (1902) 253-256.
- Sur quelques questions de calcul des variations. Bull. Soc. Math. France 33 (1905) 73-80.

[2] C.B. Morrey
- Quasi-convexity and the lower semi continuity of multiple integrals. Pacific J. Math. 2 (1952) 25-53.
- Multiple integrals in the calculus of variations. Springer, Berlin (1966).

[3] J.M. Ball
- Convexity Conditions and existence theorems in nonlinear elasticity. Arch. Rat. Mech. Anal. 63 (1977) 337-403.

[4] L. Van Hove
- Sur l'extension de la condition de Legendre du calcul des variations aux intégrales multiples à plusieurs fonctions inconnues. Proc. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap 50 (1947) 18-23.

[5] F. Murat
- Compacité par compensation. Annali Scu. Norm. Sup. Pisa. Série IV (1978) 489-507.
- Compacité par compensation II, Proc. International conference on recent methods in non-linear analysis, Rome 1978, Pitagora, Bologna 1979, 245-256.

[6] L. Tartar
- Compensated compactness and partial differential equations, in "Nonlinear analysis and mechanics". Heriot-Watt symposium. Vol. IV ed. R. J. Knops, Pitman, 1979.
- Une nouvelle méthode de résolution d'équations aux dérivées partielles non linéaires. Journées d'analyse non linéaire. Springer lecture Notes in Math., Vol. 665, 1977, 228-241.

[7] F.J. Terpstra - Die Darstellung biquadratischer Formen als Summen von Quadraten mit Anwendung auf die Variationsrechnung. Math. Ann. 116 (1938) 166-180.

[8] D. Serre - Relations d'ordre entre formes quadratiques en compacité par compensation. C.R. Acad. Sc. Paris 292 (1981) 785-787.

- Condition de Legendre-Hadamard ; espaces de matrices de rang $\neq$ C.R. Acad. Sc. Paris 293 (1981) n° 1.

Droites de solutions pour l'équation de Navier-Stokes stationnaire bidimensionnelle

RESUME.

Nous étudions la possibilité pour l'équation de Navier-Stokes $-\nu\Delta u+(u.\nabla)u+\nabla p = f$ dans Ω, div $u = 0$ dans Ω, $u = g$ sur $\partial\Omega$, d'avoir une infinité de solutions sous forme d'une droite $U^t = tw + v$, $t \in \mathbb{R}$, ce qui est assez inhabituel pour un problème non linéaire.

Au paragraphe I, nous calculons la solution générale de ce problème sous les hypothèses que Ω et w sont invariants par rotation autour de l'origine. Les droites de solutions sont nombreuses et un cas particulier est le flot de Hamel [1]. Cependant ces hypothèses ne donnent pas de droite de solution lorsque Ω est borné. Au paragraphe II, nous donnons une explication de ce phénomène. Sous des hypothèses simplificatrices, quoique peu restrictives quant aux zéros du champ w, nous montrons que l'existence d'une droite $tw + v$, $t \in \mathbb{R}$, de solutions de l'équation de Navier-Stokes, impose que Ω soit non borné.

I. EXEMPLES DE DROITES DE SOLUTIONS.

Considérons l'équation de Navier-Stokes stationnaire dans le domaine $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 / R_1 < |x| < R_2\}$ où $0 < R_1 < R_2 \leq \infty$:

$$(N\text{-}S) \quad \begin{cases} -\nu\Delta u + (u.\nabla)u + \nabla P = f & \text{dans } \Omega \\ \text{div } u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Supposons que $tw + v$ soit solution pour tout nombre réel t. Nous avons alors :

$$(\mathcal{S}) \quad \begin{cases} (w.\nabla)w + \nabla p = 0 & \text{dans } \Omega \quad (1) \\ -\nu\Delta w + (w.\nabla)v + (v.\nabla)w + \nabla q = 0 & \text{dans } \Omega \quad (2) \\ \operatorname{div} w = 0 & \text{dans } \Omega \quad (3) \\ \operatorname{div} v = 0 & \text{dans } \Omega \quad (4) \\ w = 0 & \text{sur } \Omega \quad (5). \end{cases}$$

Réciproquement, si w, v vérifient $(\mathcal{S})$, et si nous posons $\vec{f} = -\nu\Delta v + (v.\nabla)v$, $g = v|_{\partial\Omega}$, alors tw + v est solution de (N-S) pour les données $(\vec{f},g)$, quel que soit le nombre réel t.

C'est ce système $(\mathcal{S})$ que nous étudions dans la suite.

Une famille de solution des équations (1), (3), (5) est donnée par la formule, en coordonnées polaires :

$$w = \alpha(r)\vec{e}_\theta \quad \text{pour } \alpha(R_1) = \alpha(R_2) = 0.$$

Nous allons résoudre le système $(\mathcal{S})$ en supposant que w a cette forme. Le résultat est le suivant :

Théorème 1. Si $w = \alpha(r)\vec{e}_\theta$, $\alpha \not\equiv 0$, et si le système $(\mathcal{S})$ admet une solution v, w, de classe $\mathcal{C}^1$, alors $R_2 = +\infty$, et il existe α_o, $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{1}{\alpha_o}\alpha(r) = \left(\frac{R_1}{r} - \frac{r}{R_1}\right)^{1+\gamma} \qquad \text{si } \gamma \neq -2$$

$$\frac{1}{\alpha_o}\alpha(r) = \frac{R_1}{r}\left(1 - \operatorname{Log}\frac{r}{R_1}\right) \qquad \text{si } \gamma = -2$$

Dans ce cas les solutions de $(\mathcal{S})$ sont données par les formules

où
$$\begin{cases} v(r,\theta) = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\theta} + \gamma v\right)\vec{e}_r - \frac{\partial\phi}{\partial r}\vec{e}_\theta \\ \phi(r,\theta) \text{ est } 2\pi \text{ - périodique et solution de :} \\ \left\{\Delta - \frac{\gamma}{r}\left(\frac{\alpha'}{\alpha} + \frac{1}{r}\right)\right\}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (6). \end{cases}$$

Et on a

$$q(r,\theta) = \alpha\frac{\partial\phi}{\partial r} - (\alpha' + \frac{\alpha}{r})\phi - k(r)$$

où $k(r)$ est une primitive en r de la fonction radiale $\{\Delta - \frac{\gamma}{r}(\frac{\alpha'}{\alpha} + \frac{1}{r})\}\phi$. □

Remarques.

1°) Si on choisit une solution ϕ de (6) dont les dérivées secondes sont dans $L^2(\Omega)$, et si $\gamma < -1$, alors ∇v, ∇w sont dans $L^2(\Omega)$. Les solutions $tw + v$ sont donc physiquement raisonnables (Finn [2]).

2°) Si $\phi(r)$ est une fonction arbitraire du rayon, ϕ est solution de (6), et $v(r,\theta) = \frac{\gamma v}{r}\vec{e}_r - \phi'(r)\vec{e}_\theta$ est solution de $(\mathcal{S})$.

3°) Le développement en série de Fourrier de ϕ donne la solution générale de (6) :

$$\phi(r,\theta) = \varphi(r) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r) \sin n(\theta-\theta_n)$$

où a_n est solution de l'équation différentielle du second ordre :

$$y'' + \frac{1}{r}y' - (\frac{n^2+\gamma}{r^2} + \frac{\gamma\alpha'}{r\alpha})y = 0 \qquad (7_n).$$

4°) Si $D^2\phi \in L^2(\Omega)$, alors a_n est colinéaire à l'unique solution b_n de (7_n) vérifiant

$$\left.\begin{array}{ll} b_n(r) \sim r^{-n} & \text{si } \gamma < -2 \\ b_n(r) \sim r^{-\sqrt{\gamma+n^2}} & \text{si } -2 \leq \gamma < -1 \end{array}\right\} \quad r \to \infty$$

et $a_1 = 0$ si $-2 \leq \gamma < -1$.

5°) La solution $\phi = 0$ conduit à :

$$U^t(r,\theta) = \frac{\gamma v}{r}\vec{e}_r + t\alpha(r)\vec{e}_\theta$$

On a alors $\vec{f} = -\frac{\gamma^2\nu^2}{r^3}\vec{e}_r$, $g = \frac{\gamma\nu}{R_1}\vec{e}_r$. Puisque $\vec{f}$ est alors le gradient de $\frac{\gamma^2\nu^2}{2\,r^2}$, on en déduit :

Corollaire 1 :

Si $\vec{f} = 0$ et $g = C_o\vec{e}_r$, $C_o < -\frac{\nu}{R_1}$, alors l'équation de Navier Stokes admet une infinité (sous forme d'une droite) de solutions physiquement raisonnables au sens de Finn [2]. Ces solutions sont connues sous le nom de flot de Hamel [1].

Un calcul analogue, pour le cas $\phi = \phi(r)$, montre que :

Corollaire 2 :

Si $\vec{f} = \rho(r)\vec{e}_\theta$ et $g = C_o\vec{e}_r + C_1\vec{e}_\theta$ $(C_o < -\frac{\nu}{R_1})$ alors l'équation de Navier-Stokes admet une droite de solutions tw + v :

$$\begin{cases} w = \alpha(r)\vec{e}_\theta \quad \text{en posant } \gamma = \dfrac{C_o R_1}{\nu} \\ -(D_r - \frac{\gamma}{r})(D_r + \frac{1}{r})\,\mu(r) = \frac{1}{\nu}\,\rho(r) \\ \mu(R_1) = C_1 \\ v = C_o\,\dfrac{R_1}{r}\,\vec{e}_r + \mu(r)\vec{e}_\theta \end{cases}$$

Lorsque $\mu \in H^1\,(]R_1,\infty[)$, ces solutions sont physiquement raisonnables.

Démonstration du Théorème :

Il nous faut résoudre le système en v, q :

$$\begin{cases} (w.\nabla)v + (v.\nabla)w + \nabla q = \nu\Delta w & (2) \\ \text{div } v = 0 & (4). \end{cases}$$

Avec (4), nous écrivons $v = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\vec{e}_r - \frac{\partial\psi}{\partial r}\vec{e}$ où $\psi(r,\theta + 2\pi) - \psi(r,\theta) = C$ est une constante.

L'équation (2) s'écrit en polaire :

$$\begin{cases} w.\nabla v_r + v.\nabla w_r - \frac{2}{r} v_\theta w_\theta + \frac{\partial q}{\partial r} = 0 & (2.r) \\ w.\nabla v_\theta + v.\nabla w_\theta + \frac{1}{r} w_r v_\theta + \frac{1}{r} w_\theta v_r + \frac{1}{r} \frac{\partial q}{\partial \theta} & \\ \qquad = \nu(\alpha'' + \frac{\alpha'}{r} - \frac{\alpha}{r^2}) & (2.\theta) \end{cases}$$

Développons (2.θ) :

$$-\frac{\alpha}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r \partial \theta} + \frac{\alpha'}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{\alpha}{r^2}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial q}{\partial \theta} = \nu(\alpha'' + \frac{\alpha'}{r} - \frac{\alpha}{r^2})$$

Intégrons cette équation de θ à θ+2π, nous obtenons :

$$\alpha'' + \frac{\alpha'}{r} - \frac{\alpha}{r^2} = \frac{C}{2\pi\nu}(\frac{\alpha'}{r} + \frac{\alpha}{r^2}) \qquad (8)$$

En posant $\gamma = \frac{C}{2\pi\nu}$, et en se rappelant que $\alpha(R_1) = 0$, cette équation impose :

$$\begin{cases} \alpha(r) = \alpha_o \left(\frac{R_1}{r} - (\frac{r}{R_1})^{1+\gamma} \right) & \text{si } \gamma \neq -2 \\ \alpha(r) = \alpha_o \frac{R_1}{r}(1 - \text{Log}\frac{r}{R_1}) & \text{si } \gamma = -2. \end{cases}$$

Puisque $\alpha(R_2) = 0$, on en déduit que $R_2 = +\infty$.

Posons alors $\phi(r,\theta) = \psi(r,\theta) - \frac{C}{2\pi}\theta$. La fonction ϕ est 2π-périodique, et on a :

$$-\frac{\alpha}{r}\frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} + (\frac{\alpha'}{r} + \frac{\alpha}{r^2})\frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial q}{\partial \theta} = 0 \qquad (9)$$

En développant (2.r), on obtient également

$$\frac{\alpha}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} - 2\frac{\alpha}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial q}{\partial r} = 0 \qquad (10) .$$

De (9) et (10), on déduit :

$$\frac{\partial}{\partial r}(-\alpha\frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} + (\alpha' + \frac{\alpha}{r})\frac{\partial \phi}{\partial \theta}) = \frac{\partial}{\partial \theta}(\frac{\alpha}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + 2\frac{\alpha}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r}) .$$

C'est-à-dire :

$$\left\{\alpha\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) - \left(\alpha' + \frac{\alpha}{r}\right)'\right\}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0$$

Et puisque $(\alpha' + \frac{\alpha}{r})' = \frac{\gamma}{r}(\alpha' + \frac{\alpha}{r})$, on en déduit l'équation (6) :

$$\left\{\Delta - \frac{\gamma}{r}\left(\frac{\alpha'}{\alpha} + \frac{1}{r}\right)\right\}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0.$$

Réciproquement, si ϕ vérifie (6), alors la fonction $\{\Delta - \frac{\gamma}{r}(\frac{\alpha'}{\alpha} + \frac{1}{r})\}\phi$ ne dépend que de r.

Posons

$$k(r) = \int_{R_1}^{r} \left\{\Delta - \frac{\gamma}{r}\left(\frac{\alpha'}{\alpha} + \frac{1}{r}\right)\right\}\phi(s)\,ds,$$

et

$$q(r,\theta) = \alpha\frac{\partial \phi}{\partial r} - \left(\alpha' + \frac{\alpha}{r}\right)\phi - k(r).$$

Il est immédiat que (9) et (10) sont vérifiés. On en déduit que $v = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\vec{e}_r - \frac{\partial \psi}{\partial r}\vec{e}_\theta$, i.e. :

$$v = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \gamma v\right)\vec{e}_r - \frac{\partial \phi}{\partial r}\vec{e}_\theta ,$$

est solution de (2), (4).

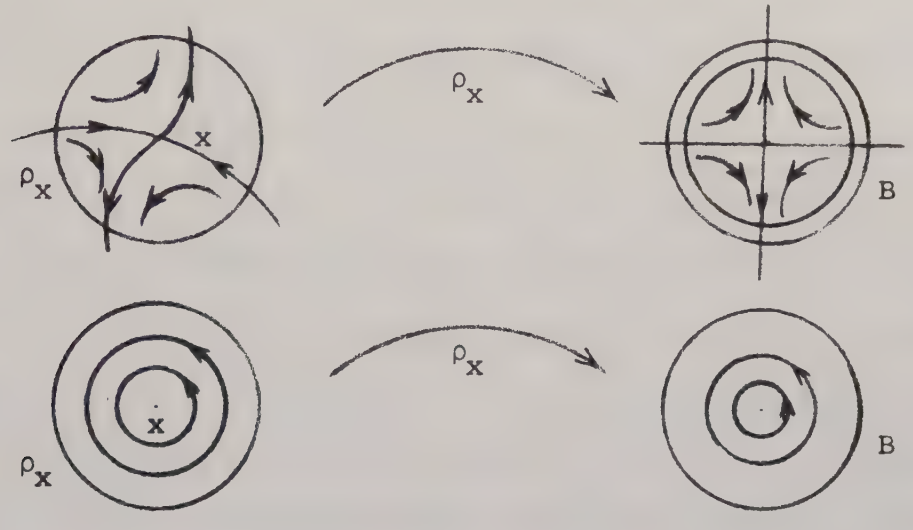
Ce qui prouve le théorème. □

II. ETUDE GENERALE.

Nous envisageons ici le cas d'un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^2$, dont le bord est une sous-variété fermée de codimension 1, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Nous faisons l'hypothèse ( ) suivante :

i) le champ w(x) est une solution, dans $\mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$, de (1), (3), (5).

ii) Le champ w(x) ne s'annule qu'en un nombre fini de points. Pour chacun de ces points x, il existe un voisinage σ_x, et un homéomorphisme $\rho_x : \sigma_x \to B = \{y \in \mathbb{R}^2 ; |y| < 1\}$ tel que, si ϕ est le potentiel de w, $(w_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x_2}, w_2 = -\frac{\partial \phi}{\partial x_1})$, l'image $\rho_x(\phi^{-1}(\phi(x))$ dans B soit une croix à un nombre fini de branches.



Soit x un zéro de w. Si Dw(x) est inversible, l'hypothèse (i) vérifiée en x, et le nombre de branches est 4 ou 0 comme le montrent les deux figures ci-dessus.

Nous nous proposons de démontrer le théorème suivant :

Théorème 2 :

Si Ω est borné connexe et $\partial\Omega$ est de classe $\mathcal{C}^1$, si w vérifie l'hypothèse ($\mathcal{H}$), alors le système (2), (4), dont l'inconnue est le couple (v,q) n'admet pas de solution de classe $\mathcal{C}^1(\Omega)$.

On en déduit que si Ω est borné et $\partial\Omega$ de classe $\mathcal{C}^1$ p.m., et si tw = v est une droite de solution, alors w ne vérifie pas ii). Cependant, c'est une hypothèse peu restrictive, qui est vérifiée

génériquement. On peut donc penser que si Ω est borné, régulier, l'équation de Navier-Stokes stationnaire n'admet pas de droite de solutions (ce qui n'exclurait pas de toute façon l'existence d'une courbe de solutions).

1. Une équation différentielle dans l'espace des potentiels.

Soit x_o un zéro de w. Le potentiel ϕ, défini à une constante près par $w_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x_2}$, $w_2 = -\frac{\partial \phi}{\partial x_1}$, est défini sur $\overline{\Omega}$ tout entier grâce à (5). Soit $G(x_o)$ la composante connexe de x_o dans l'ensemble $\phi^{-1}(\phi(x_o))$. C'est un graphe fini (nombre fini de sommets et d'arcs) d'après ii). Si x_1 est un autre zéro de w, $G(x_o)$ et $G(x_1)$ sont disjoints. Soit G la réunion des $G(x_o)$, faite sur les zéros de v tels que $G(x_o) \neq \{x_o\}$ (on exclut les zéros qui sont des maxima ou des minima locaux de 0). C'est encore un graphe fini, et Ω-G n'a qu'un nombre fini de composantes connexes. Soit Ω_k l'une de ces composantes connexes.

D'après (1), nous avons :

$$D_1(w.\nabla w_2) - D_2(w.\nabla w_1) = 0$$

ou

$$w.\nabla(D_1 w_2 - D_2 w_1) = 0$$

ou

$$\text{dét}(\nabla\phi, \nabla(\Delta\phi)) = 0 \qquad (11).$$

Puisqu'un point critique de $\phi_{|\Omega_k}$ est un maximum (ou minimum) local, et que $\phi_{|\partial\Omega_k}$ est localement constant, $\phi_{|\Omega_k}$ admet au plus un point critique, qui est maximum (ou minimum) global.

On déduit alors de (11) qu'il existe une fonction numérique τ_k telle que :

$$\Delta\phi = \tau_k \circ \phi \qquad \text{sur } \Omega_k \ .$$

Soit $(\alpha_k, \beta_k) = \phi(\Omega_k)$. Si $a \in]\alpha_k, \beta_k[$, notons $\mathcal{C}_a^k = \phi|_{\Omega_k}^{-1}(a)$. C'est une courbe de Jordan fermée simple, dont le vecteur tangent unitaire est $\frac{w}{|w|}$. On a donc

$$\int_{\mathcal{C}_a^k} \frac{w}{|w|} \cdot \nabla(w.v + q) d\sigma = 0 \qquad (12).$$

Cependant :

$$\nabla(w.v+q) = \nabla q + (w.\nabla)v + (v.\nabla)w + (\text{rot } v)w \wedge \vec{e}_3 + (\text{rot } w)v \wedge \vec{e}_3$$

où
$$\begin{cases} \text{rot } v = \dfrac{\partial v_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial v_1}{\partial x_2} \\ v \wedge \vec{e}_3 = v_2 \vec{e}_1 - v_1 \vec{e}_2 \end{cases} .$$

Donc :

$$\frac{w}{|w|} \cdot \nabla(w.v+q) = \nu \frac{w}{|w|} \cdot \Delta w + (\text{rot } w) \frac{w}{|w|} \cdot (v \wedge \vec{e}_3) \qquad (13).$$

Or rot $w = -\Delta\phi = -\tau_k(a)$, et $\frac{w}{|w|} \cdot (v \wedge \vec{e}_3)$ est égal à $v \cdot (\vec{e}_3 \wedge \frac{w}{|w|}) = v.n$, où n est le vecteur normal unitaire à $\mathcal{C}_a^k$, orienté de façon que $(\frac{w}{|w|}, n)$ soit toujours direct : $n = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}$.

Enfin, $\Delta w = -\frac{\partial}{\partial x_2}(\text{rot } w)\vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_1}(\text{rot } w)\vec{e}_2$. Donc

$$\frac{w}{|w|}.\Delta w = -\, n.\nabla(\text{rot } w) = n.\nabla(\Delta\phi)$$
$$= \tau'_k(a)\, n.\nabla\phi = |\nabla\phi|\tau'_k(a).$$

Finalement, (12) et (13) donnent :

$$\gamma_k(a)\, \tau'_k(a) + \tau_k(a) \int_{\mathcal{C}_a^k} v.n \, d\sigma = 0$$

où

$$\gamma_k(a) = \int_{\mathcal{C}_a^k} |\nabla\phi| d\sigma \qquad (14).$$

Cependant, puisque v est à divergence nulle, l'intégrale de contour $\int_{\mathcal{C}_a^k} v.n \, d\sigma$ ne dépend pas de $a \in]\alpha_k, \beta_k[$, si bien que

$$\mu_k(a)\tau_k'(a) + C_k \tau_k(a) = 0 \text{ dans }]\alpha_k, \beta_k[\qquad (15).$$

Remarque 1 :

Si $\phi_{|\Omega}$ admet un point critique, nécessairement unique, alors Ω_k est simplement connexe, et on a $C_k = 0$, donc τ_k est également une constante en vertu de (15).

2. Application du principe du maximum.

Si $\phi_{|\Omega_k}$ n'admet pas de point critique, alors μ_k ne s'annule pas sur $[\alpha_k, \beta_k]$ sauf peut-être en α_k (ou en β_k) si cette valeur est prise par ϕ sur $\partial\Omega_k \cap \partial\Omega$. On en déduit, puisque γ_k est continue et que τ_k vérifie l'équation différentielle (15), que :

- ou bien τ_k est identiquement nul sur $[\alpha_k, \beta_k]$, et il en est de même pour $\Delta\phi$.
- ou bien τ_k ne s'annule pas sur $[\alpha_k, \beta_k]$, sauf peut-être en α_k (ou β_k) lorsque cette valeur est prise par ϕ sur $\partial\Omega_k \cap \partial\Omega$. Dans ce cas, $\Delta\phi$ ne s'annule pas sur $\overline{\Omega}_k$, sauf peut-être sur $\partial\Omega_k \cap \partial\Omega$.

Montrons alors le :

Lemme : Il est impossible que $\Delta\phi$ prenne des valeurs strictement positives et d'autres strictement négatives sur Ω.

Démonstration du Lemme : si le Lemme est faux, considérons les ensembles d'entiers tels que :

$$I = \{k \; ; \; \Delta\phi = 0 \text{ sur } \Omega_k\}$$

$$J = \{k \; ; \; \Delta\phi \text{ ne s'annule pas sur } \Omega_k\} .$$

D'après ce qui précède, pour tout Ω_k, on a $k \in I \cup J$, et par hypothèse on aurait $I \neq \emptyset$ et $J \neq \emptyset$. Il est immédiat qu'il existe (vu la connexité de Ω) $i \in I$ et $j \in J$ tels que $\partial\Omega_i$ et $\partial\Omega_j$ contiennent en commun un arc $\gamma \in G$.
Mais puisque $\gamma \in \partial\Omega_i$, $\Delta\phi|_\gamma = 0$, et puisque $\gamma \in \partial\Omega_j$, $\Delta\phi|_\gamma \neq 0$, ce qui est contradictoire. Et le Lemme est démontré.

D'après le Lemme, $\Delta\phi$ est de signe constant sur Ω, par exemple $\Delta\phi \geq 0$. Alors ϕ atteint son maximum au bord de Ω, sur une composante connexe Γ de $\partial\Omega$. Or, sur Γ, on a $\nabla\phi = 0$. Le principe du maximum nous informe que dans ce cas, $\phi \equiv$ constante sur Ω. Ceci contredit l'hypothèse (℘). (En fait cela donne $w = 0$, ce qui ne donne pas une droite de solutions pour l'équation de Navier-Stokes). Le Théorème est démontré.

BIBLIOGRAPHIE.

[1]. Finn, R., On the exterior stationary problem for the Navier-Stokes equations and associated perturbation problems, Arch. Rat. Mech. Anal., 19 (1965), 363-406.

[2]. Rosenblatt, M., Solutions exactes des équations du mouvement des liquides visqueux, Mémorial des Sciences Mathématiques, 72 (1935), p. 25.

EQUATIONS DE NAVIER STOKES STATIONNAIRE AVEC DONNEES PEU REGULIERES APPLICATION AUX PROBLEMES DE TAYLOR ET DE LA CAVITE

P L A N :

0. Introduction

1. Existence

2. Unicité et régularité

3. Un exemple : la cavité

4. Deuxième exemple : le problème de Taylor

5. Remarques sur le problème d'évolution.

ABSTRACT : We stude the Navier-Stokes equation

$- \nu\Delta u + (u.\nabla)u + \nabla p = f$, div $u = 0$ in Ω, $u = \phi$ on $\partial\Omega$

when $f \in W^{-1,p}(\Omega)$, $\phi \in W^{1-\frac{1}{p},p}(\Omega)$, $p < 2$. Usual a priori estimate is no longer valid. Nevertheless, one proves in this article the existence of a solution $u \in W^{1,p}(\Omega)$ when $p > \frac{n}{2}$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$) and $\int_{\Gamma_i} \phi.n \, d\sigma = 0$ for each connected component Γ_i of $\partial\Omega$.

The theory is then applied to the cavity and Taylor problems. The evolutionnary Navier-Stokes equation is also investigate, but with the stationnary technical.

0 - INTRODUCTION.

Nous nous intéressons dans la première partie de ce texte (§ 1 et 2) à l'existence d'une solution $(\vec{u}, p)$ de l'équation de Navier-Stokes stationnaire, lorsque les données f et ϕ sont peu régulières :

$$(N - S) \quad \begin{cases} -\nu \Delta \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} + \vec{\text{grad}}\, p = \vec{f} & \text{dans } \Omega \\ \text{div } \vec{u} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \vec{u} = \phi & \text{sur } \Omega. \end{cases}$$

Nous supposerons que Ω est un ouvert borné connexe de R^n (n = 2 ou 3) et que le bord $\partial\Omega$ est une sous-variété fermée de codimension 1, de classe $\mathcal{C}^2$. Les composantes connexes du bord sont notées Γ_k, $0 \leq k \leq N$.

Rappelons que $L^p(\Omega)$ $(1 \leq p < +\infty)$ désigne l'espace des (classes de) fonctions réelles mesurables sur Ω dont la puissance p-ième est intégrable ; muni de la norme $|v|_p = (\int_\Omega |v(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$, c'est un espace de Banach. L'ensemble $W^{1,p}(\Omega)$ des éléments de $L^p(\Omega)$ dont les dérivées premières (au sens des distributions) sont également dans $L^p(\Omega)$ est également un espace de Banach dont la norme est $||v||_p = (|v|_p^p + \sum_{i=1}^{n} |\frac{\partial v}{\partial x_i}|_p^p)^{\frac{1}{p}}$. L'application linéaire définie sur $\mathcal{C}^1(\Omega)$ à valeurs dans $L^p(\partial\Omega)$, qui fait correspondre à v sa restriction à $\partial\Omega$, se prolonge par continuité à $W^{1,p}(\Omega)$ en un morphisme noté γ. L'image de $W^{1,p}(\Omega)$ par γ est notée $W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$; c'est un espace de Banach lorsqu'on le munit de la norme $\{\Phi\}_p = \inf_{\gamma v = \Phi} ||v||_p$. D'autre part, l'espace des distributions sur Ω qui s'écrivent sous la forme $f + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$, $f, f_i \in L^p(\Omega)$ est noté $W^{-1,p}(\Omega)$. C'est un espace de Banach muni de la norme

$$||v||_{-1,p} = \inf_{v = f + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}} \left(|f|_p^p + \sum_{i=1}^{n} |f_i|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} .$$

De plus, on pose $W_0^{1,p}(\Omega) = W^{1,p}(\Omega) \cap \text{Ker } \gamma$. Enfin, si X est un espace de Banach, on pose $\mathbf{X} = X^n$, et on utilisera la même notation pour la norme dans $\mathbf{X}$ et la norme dans X.

L'existence d'une solution de l'équation de Navier-Stokes est bien connue (Leray [1], Hopf [2])

lorsque $\vec{f} \in \mathbf{W}^{-1,2}(\Omega)$,

et $\vec{\phi} \in \mathbf{W}^{\frac{1}{2},2}(\Gamma)$ et que les conditions suivantes sont vérifiées ($\vec{n}(\sigma)$ étant la normale unitaire extérieure à $\partial\Omega$ au point σ) :

$$\int_{\Gamma_k} \vec{\phi}(\sigma) \cdot \vec{n}(\sigma)\, d\sigma = 0 \quad , \quad 0 \leq k \leq N \qquad (1) ,$$

Nous prouvons ci-dessous l'existence d'une solution de l'équation de Navier-Stokes lorsque $\vec{f} \in \mathbf{W}^{-1,p}(\Omega)$, $\phi \in \mathbf{W}^{1-\frac{1}{p},p}(\Omega)$, $\frac{n}{2} < p < 2$, les conditions (1) ci-dessus étant satisfaites. La solution $\vec{u}(x)$ se trouve dans l'espace auquel on s'attend selon les résultats de Cattabriga (3), c'est-à-dire $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$. En fait, si $\vec{u}^\circ$ est la solution du problème de Stokes linéaire dont les données sont $\vec{f}$ et $\vec{\phi}$, alors la différence $\vec{u} - \vec{u}^\circ$ se trouve dans un espace $\mathbf{W}^{1,q}(\Omega)$ avec $q > p$.

La difficulté essentielle du problème est l'obtention d'une estimation a priori. Pour cela, il faut "détruire" le terme non-linéaire, en deux étapes. Premièrement, on construit un relèvement $\vec{u}^*$ de ϕ à divergence nulle (Lemme 3) tel que le champ $\vec{u} - \vec{u}^*$ soit solution d'une équation de Navier-Stokes homogène, perturbée par le terme linéaire $(\vec{u}^* . \nabla)(\vec{u} - \vec{u}^*) + (\vec{u} - \vec{u}^*) . \nabla \vec{u}^*$, et dont le second membre est dans $\mathbf{W}^{-1,2}(\Omega)$. On applique ensuite

la méthode de Hopf, avec une légère modification due au manque de régularité de $\vec{u}^*$.

Cette méthode nous permet dans la deuxième partie de l'article de traiter quelques problèmes de mécanique des fluides pour lesquels le bord du domaine, qui n'est pas nécessairement de classe $\mathcal{C}^2$, est animé d'un mouvement uniforme de translation ou de rotation. Quelques exemples sont développés aux paragraphes 3 et 4, l'écoulement dans une cavité et le problème de Taylor. C'est M.T.B. Benjamin qui a attiré notre attention sur le fait que les résultats d'existence connus pour les équations de Navier-Stokes stationnaires (cf. par exemple [4]) ne s'appliquaient pas à l'écoulement de Taylor, et nous l'en remercions.

Enfin, nous considérons au paragraphe 5 le problème d'évolution. On indique comment le résoudre lorsque $\vec{f} \in W^{1,\infty}(0, T ; W^{-1,p}(\Omega))$ et $\vec{\Phi} \in W^{1,\infty}(0, T ; W^{1-\frac{1}{p},p}(\Omega))$ où $W^{1,\infty}(0,T)$ est l'espace des fonctions lipschitziennes sur $(0,T)$. Ces hypothèses peuvent être affaiblies pour les problèmes de la cavité et de Taylor ; dans ces deux cas $\vec{\Phi} \in W^{1,2}(0, T ; W^{1-\frac{1}{p},p}(\Omega))$, $p \geq \frac{4n}{n+4}$ suffit. Il semble que ces résultats ne soient pas optimaux : les hypothèses sur $\vec{\Phi}$ et $\vec{f}$, très fortes, sont dues à l'utilisation brutale de la technique adaptée au cas stationnaire.

1. EXISTENCE.

THEOREME 1.1 : Soient $\vec{f} \in W^{-1,p}(\Omega)$ *et* $\vec{\phi} \in W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$ $(\frac{n}{2} < p < 2)$ *vérifiant les conditions de flux à travers les parois :*

$$\int_{\Gamma_K} \phi(\sigma) . \vec{n}(\sigma)\, d\sigma = 0 \qquad 0 \leq k \leq N \qquad (1).$$

Il existe une solution $\vec{u} \in W^{1,p}(\Omega)$, $p \in L^p(\Omega)$ *de l'équation de Navier-Stokes :*

$$\begin{cases} -\nu\Delta u_i + \operatorname{div}(u_i \vec{u}) + \dfrac{\partial p}{\partial x_i} = f_i \text{ dans } \Omega,\ 1 \leq i \leq n, \\ \operatorname{div} \vec{u} = 0 \qquad \text{dans } \Omega , \\ \gamma \vec{u} = \vec{\phi} . \end{cases}$$

De plus, si u° *désigne la solution du problème de Stokes*

$$\begin{cases} -\nu\Delta \vec{u}^\circ + \operatorname{grad} p^\circ = \vec{f} \qquad \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \vec{u}^\circ = 0 \qquad \text{dans } \Omega, \\ \gamma \vec{u}^\circ = \vec{\phi} . \end{cases}$$

la différence $\vec{u} - \vec{u}^\circ$ *est dans* $\mathbf{W}^{1,q}(\Omega)$ *avec* $\frac{1}{q} = \frac{2}{p} - \frac{2}{n}$, $q > p$.

LEMME 1.2 : S'il existe un relèvement $\vec{v} \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ *de* $\vec{\phi}$ *(i.e* $\gamma\vec{v} = \vec{\phi}$*), à divergence nulle, et une pression* $\pi \in L^p(\Omega)$ *tels que* $-\nu\Delta v_i + \operatorname{div}(v_i\vec{v}) + \frac{\partial \pi}{\partial x_i} - f_i \in W^{-1,r}(\Omega)$, $1 \leq i \leq n$ *et* $p \leq r \leq 2$, *alors il existe un relèvement* $\vec{w} \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$, *à divergence nulle, de* Ω, *et une pression* $\overline{\pi} \in L^p(\Omega)$ *tels que* $-\nu\Delta w_i + \operatorname{div}(w_i\vec{w}) + \frac{\partial \overline{\pi}}{\partial x_i} - f_i \in W^{-1,s}(\Omega)$, $1 \leq i \leq n$ $\frac{1}{s} = \frac{1}{r} + \frac{1}{p} - \frac{2}{n}$ (*donc* $s > r$) .

Démonstration du Lemme 1.2

D'après Cattabriga (3), il existe une solution $(\vec{v}', \pi') \in \mathbf{W}^{1,r}(\Omega) \times L^r(\Omega)$ du problème de Stokes linéaire suivant :

$$\begin{cases} -\nu\Delta v'_i + \frac{\partial \pi'}{\partial x_i} = -\nu\Delta v_i + \operatorname{div}(v_i\vec{v}) + \frac{\partial \pi}{\partial x_i} - f_i & \text{dans } \Omega,\ 1 \leq i \leq n, \\ \operatorname{div}\vec{v}' = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \gamma\vec{v}' = 0 . \end{cases}$$

Posons $\vec{w} = \vec{v} - \vec{v}'$, $\overline{\pi} = \pi - \pi'$. Puisque $r \geq p$, on a $\vec{w} \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ et $\overline{\pi} \in L^p(\Omega)$. De plus :

$$-\nu\Delta w_i + \operatorname{div}(w_i\vec{w}) + \frac{\partial \overline{\pi}}{\partial x_i} - f_i = \operatorname{div}(v'_i\vec{v}' + v_i\vec{v}' + v'_i\vec{v}) .$$

Cependant, d'après le théorème d'immersion de Sobolev, on a $\vec{v}' \in \mathbf{L}^a(\Omega)$, $\frac{1}{a} = \frac{1}{r} - \frac{1}{n}$, et $\vec{v} \in \mathbf{L}^b(\Omega)$, $\frac{1}{b} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n} \geq \frac{1}{a}$. Il s'ensuit $\operatorname{div}(v'_i\vec{v}' + v'_i\vec{v} + v_i\vec{v}') \in W^{-1,s}(\Omega)$, avec $\frac{1}{s} = \frac{1}{r} + \frac{1}{p} - \frac{2}{n}$, ce qui prouve le lemme.

LEMME 1.3 : Il existe un relèvement $\vec{u}^* \in W^{1,p}(\Omega)$ *, à divergence nulle, de* $\vec{\phi}$*, et une pression* $\pi^* \in L^p(\Omega)$ *tels que*

$$- \nu\Delta u_i^* + \operatorname{div}(u_i^* \vec{u}^*) + \frac{\partial \pi^*}{\partial x_i} - f_i \in W^{-1,2}(\Omega),\ 1 \leq i \leq n .$$

Démonstration du Lemme 1.3

D'après Cattabriga (3), la solution $(\vec{u}_o, p_o)$ du problème de Stokes linéaire de donnée $\vec{f}$ et $\vec{\phi}$ existe, avec $\vec{u}_o \in W^{1,p}(\Omega)$, $p_o \in L^p(\Omega)$. Alors

$$- \nu\Delta u_i^o + \operatorname{div}(u_i^o \vec{u}^o) + \frac{\partial p_o}{\partial x_i} - f_i = \operatorname{div}(u_i^o \vec{u}^o) \in W^{-1,q}(\Omega)$$

avec $\frac{1}{q} = \frac{2}{p} - \frac{2}{n}$, $q > p$.

En appliquant le Lemme 1.2 et en raisonnant par récurrence, on obtient une suite $(\vec{u}^j, p_j)$ d'éléments de $W^{1,p}(\Omega) \times L^p(\Omega)$ vérifiant pour $0 \leq j \leq \frac{n(2-p)}{4p-2n}$:

$$- \nu\Delta u_i^j + \operatorname{div}(u_i^j \vec{u}^j) + \frac{\partial p_j}{\partial x_i} - f_i \in W^{-1,r_j}(\Omega),\quad 1 \leq i \leq n,$$

avec $\frac{1}{r_j} = \frac{1}{p} + (j+1)\left(\frac{1}{p} - \frac{2}{n}\right)$.

Lorsque j est égal à la partie entière de $\frac{n(2-p)}{4p-2n}$, on pose $\vec{u}^* = \vec{u}^j$; on a alors $r_j \geq 2$, ce qui prouve le Lemme.

Puisque $\operatorname{div} \vec{u}^* = 0$ et $\int_{\Gamma_k} \vec{u}^* \cdot \vec{n}\, d\sigma = 0$ pour tout $0 \leq k \leq N$, il est connu (Temam, (4)) qu'il existe un champ $\zeta \in (W^{2,p}(\Omega))^{\frac{n(n-1)}{2}}$ tel que $\vec{u}^* = \vec{\operatorname{rot}}\, \zeta$.

Nous appliquons alors la méthode de Hopf. Soit $\rho(x) = d(x, \partial\Omega)$ la distance de x au bord de Ω. Hopf (2) construit pour tout $\varepsilon > 0$ une fonction $\theta_\varepsilon \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$ jouissant des propriétés suivantes :

i) $0 \leq \theta_\varepsilon \leq 1$ dans Ω, et $\theta_\varepsilon = 1$ dans un voisinage de $\partial\Omega$,

ii) $\theta_\varepsilon = 0$ si $\rho(x) \geq 2\delta(\varepsilon)$, $\delta(\varepsilon) = \exp(-\frac{1}{\varepsilon})$,

iii) $|D_i \theta_\varepsilon(x)| \leq \frac{\varepsilon}{\rho(x)}$ si $\rho(x) \leq 2\delta(\varepsilon)$, $1 \leq i \leq n$.

On montre alors :

LEMME 1.4 : *Soit* $\vec{u}^\varepsilon = \mathrm{rot}(\theta_\varepsilon \zeta) \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$. *Le champ* $\vec{u}^\varepsilon$ *est un relèvement à divergence nulle de* $\vec{\Omega}$. *De plus, si* ε *est assez petit, on a :*

$$\left| \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} v_i v_j \frac{\partial u_j^\varepsilon}{\partial x_i} dx \right| \leq \frac{\nu}{4} ||v||_2^2 \quad \textit{pour tout } \vec{v} \in W_o^{1,2}(\Omega).$$

Démonstration du Lemme 1.4

L'espace des champs de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ à support compact est dense dans l'espace $W_o^{1,2}(\Omega)$. Il suffit donc de prouver l'inégalité pour ces champs.

Par intégration par partie, on a :

$$\left| \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} v_i v_j \frac{\partial u_j^\varepsilon}{\partial x_i} dx \right| = \left| \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} u_j^\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_i}(v_i v_j) dx \right|$$

$$\leq c_1 ||\vec{v}||_2 \sum_{i,j=1}^{n} |v_i u_j^\varepsilon|_2$$

Cependant, puisque $\vec{u}^\varepsilon = \vec{\mathrm{rot}}(\theta_\varepsilon \zeta)$ et $\zeta \in (L^\infty(\Omega))^{\frac{n(n-1)}{2}}$:

$$|v_i u_j^\varepsilon|_2 \leq |v_i \theta_\varepsilon u_j^*|_2 + |\zeta|_\infty |v_i D \theta_\varepsilon|_2$$

$$\leq \left(\int_{\rho(x) \leq 2\delta(\varepsilon)} v_i^2 |u_j^*|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \varepsilon |\zeta|_\infty \left|\frac{v_i}{\rho}\right|_2$$

Enfin, le théorème de Sobolev montre que $\vec{u}^* \in \mathbf{L}^n(\Omega)$, $|\vec{v}|_\alpha \leq c_2 ||\vec{v}||_2$ pour $\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$ [1], et l'inégalité de Hardy entraîne (Temam, (4)) $\left|\frac{v_i}{\rho}\right| \leq c_3 ||\vec{v}||_2$.

---

[1] Pour n = 2, on n'a pas $|\vec{v}|_\infty \leq c_2 ||\vec{v}||_2$. Mais $\vec{u}^* \in L^m(\Omega)$, $m > 2$, et avec $\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{2} - \frac{1}{m}$, on a $|\vec{v}|_\alpha \leq c_2 ||\vec{v}||_2$.

On en déduit :

$$|v_i\, u_j^\varepsilon|_2 \leq |v_i|_\alpha \Big(\int_{\rho(x)\leq 2\delta(\varepsilon)} |u_j^*|^n \, dx \Big)^{\frac{1}{n}} + c_3\, \varepsilon\, |\zeta|_\infty\, ||\vec{v}||_2$$

$$\leq \mu(\varepsilon)\, ||\vec{v}||_2 ,$$

où $\mu(\varepsilon) = c_2 \Big(\int_{\rho(x)\leq 2\delta(\varepsilon)} |u_j^*|^n \, dx \Big)^{\frac{1}{n}} + c_3\, \varepsilon\, |\zeta|_\infty \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$.

Pour ε assez petit, on a donc $c_1\, n^2 \mu(\varepsilon) \leq \frac{\nu}{4}$, ce qui prouve le Lemme.

Fin de la démonstration du théorème 1.1 :

Si β est un nombre réel > 0, on peut trouver un champ $\vec{\xi} \in (\mathcal{C}^2(\bar{\Omega}))^{\frac{n(n-1)}{2}}$ et à support compact tel que $||(1 - \theta_\varepsilon)\, \zeta - \xi||_n \leq \beta$. Si on pose $\vec{y} = \vec{rot}\, \xi$, on a $\vec{y} \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$, supp $\vec{y} \subset\subset \Omega$ et $|u^* - \vec{u}^\varepsilon - \vec{y}|_n \leq c_4 \beta$.

Posons $\vec{v}^* = \vec{u}^* - \vec{y}$. Si $\vec{v} \in W_o^{1,2}(\Omega)$, on a :

$$\Big| \int_\Omega v_i v_j \, \frac{\partial v_j^*}{\partial x_i} \, dx \Big| \leq \Big| \int_\Omega v_i v_j \, \frac{\partial u_j^\varepsilon}{\partial x_i} \, dx \Big| + \Big| \int_\Omega v_i v_j \, \frac{\partial (u_j^* - u_j^\varepsilon - y_j)}{\partial x_i} \, dx \Big| .$$

Puis, avec $\alpha^{-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$:

$$\Big| \int_\Omega v_i v_j \, \frac{\partial}{\partial x_i} (u_j^* - u_j^\varepsilon - y_j) dx \Big| = \Big| \int_\Omega (u_j^* - u_j^\varepsilon - y_j) \frac{\partial}{\partial x_i} (v_i v_j) dx \Big|$$

$$\leq 2\, c_4 \beta\, |\vec{v}|_\alpha\, ||\vec{v}|| \leq 2\, c_3 c_4 \beta\, ||\vec{v}||^2 .$$

Donc :

$$\Big| \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \, \frac{\partial v_j^*}{\partial x_i} \, dx \Big| \leq \Big(\frac{\nu}{4} + 2\, n^2\, c_3 c_4 \beta \Big) ||\vec{v}||^2$$

Choisissons β de façon que $\frac{\nu}{4} + 2\, n^2 c_3 c_4 \beta = \frac{\nu}{2}$. On a alors, pour tout champ $\vec{v}$ de classe $\mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, à divergence nulle et à support compact, et pour toute pression q de classe $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$:

$$\int_\Omega \sum_i v_i \left(-\nu \Delta v_i + \operatorname{div}\left(v_i \vec{v} + v_i \vec{v}^* + v_i^* \vec{v}\right) + \frac{\partial q}{\partial x_i}\right) dx \geq \frac{\nu}{2} \left|\left|\vec{v}\right|\right|^2 .$$

Il est alors classique que pour tout second membre $\vec{g} \in W^{-1,2}(\Omega)$, il existe une solution de l'équation de Naver-Stokes perturbée :

$$(N - S.1)\begin{cases} -\nu \Delta v_i + \operatorname{div}\left(v_i \vec{v} + v_i \vec{v}^* + v_i^* \vec{v}\right) + \frac{\partial q}{\partial x_i} = g_i & \text{dans } \Omega,\ 1 \leq i \leq n, \\ \operatorname{div} \vec{v} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \gamma \vec{v} = 0 . \end{cases}$$

Et on a de plus $\left|\left|\vec{v}\right|\right|_2 \leq \frac{2}{\nu} \left|\left|\vec{g}\right|\right|_{-1,2}$. Lorsqu'on choisit $g_i = f_i + \nu \Delta v_i^* - \operatorname{div}\left(v_i^* \vec{v}^*\right) - \frac{\partial \pi^*}{\partial x_i}$, on a $\vec{g} \in W^{-1,2}(\Omega)$. Si on pose $\vec{u} = \vec{v} + \vec{v}^*$, où $(\vec{v}, q)$ est la solution de (N - S.1), et $p = q + \pi^*$, alors $(\vec{u}, p) \in W^{1,p}(\Omega) \times L^p(\Omega)$ est une solution de l'équation de Navier-Stokes dont les données sont $\vec{f}$ et $\vec{\phi}$.

Enfin :

$$\vec{u} - \vec{u}^\circ = \vec{v} + \vec{v}^* - \vec{u}^\circ = \vec{v} - \vec{y} + \vec{u}^* - \vec{u}^\circ$$

$$= \vec{v} - \vec{y} + \sum_{j=0}^{\left|\frac{n(2-p)}{4p-2n}\right|-1} \left(\vec{u}^{j+1} - \vec{u}^j\right) \in W^{1,q}(\Omega)$$

où $\frac{1}{q} = \frac{2}{p} - \frac{2}{n}$, $q > p$. En effet, le terme le moins régulier de la somme du membre de droite est $\vec{u}^1 - \vec{u}^\circ$, qui est dans $W^{1,q}(\Omega)$.

2. UNICITE ET REGULARITE

Régularité : Supposons que $\vec{u}$, $\vec{v}$ sont deux solutions dans $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$, $p > \frac{n}{2}$, de l'équation de Navier-Stokes. En posant $\vec{w} = \vec{v} - \vec{u}$, on a :

$$\begin{cases} -\nu\Delta\vec{w} + \nabla p = -(\vec{w}.\nabla)\vec{u} - (\vec{u}.\nabla)\vec{w} - (\vec{w}.\nabla)\vec{w} & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div}\vec{w} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \vec{w} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Ce système, le théorème de Sobolev et le théorème de régularité de Cattabriga impliquent que si $\vec{w} \in \mathbf{W}^{1,s_m}(\Omega)$, alors $\vec{w} \in \mathbf{W}^{1,s_{m+1}}(\Omega)$ si $\frac{1}{s_{m+1}} = \frac{1}{s_m} + \frac{1}{p} - \frac{2}{n} > 0$. Puisque $p > \frac{n}{2}$ et $s_o = p$, on en déduit que $\vec{w} \in \mathbf{W}^{1,s}(\Omega)$ pour tout $s < +\infty$.

Proposition 2.1. (Régularité) : Si $(\vec{f},\vec{\phi}) \in \mathbf{W}^{-1,p}(\Omega) \times \mathbf{W}^{1-\frac{1}{p},p}(\Omega)$, $p > \frac{n}{2}$, *et si* $\vec{u}$, $\vec{v} \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ *sont deux solutions de l'équation de Navier-Stokes, alors* $\vec{v} - \vec{u} \in \mathbf{W}^{1,s}(\Omega)$ *pour tout* $s < \infty$.

En d'autres termes, l'irrégularité d'une solution ne dépend pas de la solution choisie mais seulement des données $\vec{f}$ et $\vec{\phi}$.

Unicité : On peut prendre le produit scalaire de la première équation par $\vec{w}$. On obtient :

$$\nu||\vec{w}||^2 - b(\vec{w}, \vec{w}, \vec{u}) = 0 \qquad (2.1).$$

Ici $||\vec{w}||^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \left|\frac{\partial w_i}{\partial x_j}\right|_2^2$ est une norme sur $\mathbf{W}_o^{1,2}(\Omega)$ équivalente à celle induite par $\mathbf{W}^{1,2}(\Omega)$, et

$$b(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} w_i u_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\, dx.$$

Par l'inégalité de Hölder et le théorème de Sobolev, on a :

$$|b(\vec{w}, \vec{w}, \vec{u})| \leq C_1 ||\vec{w}|| \, |\vec{w}|_r \, |\vec{u}|_n \,, \quad \frac{1}{r} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$$

$$\leq C_2(\Omega) ||\vec{w}||^2 ||\vec{u}||_{1,\frac{n}{2}}.$$

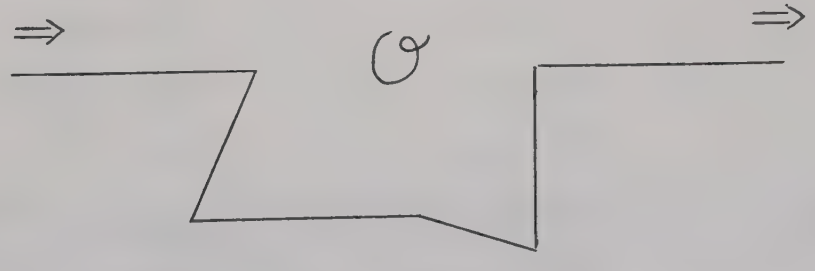
Si bien que, si $||\vec{u}||_{1,p} \leq C_3(\Omega)\nu$, on obtient $||\vec{w}|| = 0$, c'est-à-dire $\vec{w} = 0$ et $\vec{v} = \vec{u}$. Cependant, d'après le théorème d'inversion locale au voisinage de $\vec{u} = 0$ dans $W^{1,p}(\Omega)$ et d'après les estimations de Cattabriga, il existe des constantes $C_4(\Omega)$ et $C_5(\Omega)$ telles que si $||\vec{f}||_{-1,p} \leq \nu^2 C_4(\Omega)$ et $\{\vec{\phi}\}_p \leq \nu C_5(\Omega)$, il existe une solution de l'équation de Navier-Stokes vérifiant $||\vec{u}||_{1,p} \leq C_6(\Omega)\left(||\vec{f}||_{-1,p}\nu^{-1} + \{\vec{\phi}\}_p\right)$.

De ce qui précède, on déduit :

Proposition 2.2. (Unicité) : Il existe des constantes C_7 *et* C_8, *ne dépendant que de l'ouvert* Ω, *telles que si* $\frac{n}{2} < p \leq 2$, *si* $\nu > 0$ *et si* $||\vec{f}||_{-1,p} \leq \nu^2 C_7$, $\{\vec{\phi}\}_p \leq \nu C_8$, *alors la solution* $\vec{u} \in W^{1,p}(\Omega)$ *de l'équation de Navier-Stokes est unique.*

3. UN EXEMPLE : LA CAVITE (n = 2).

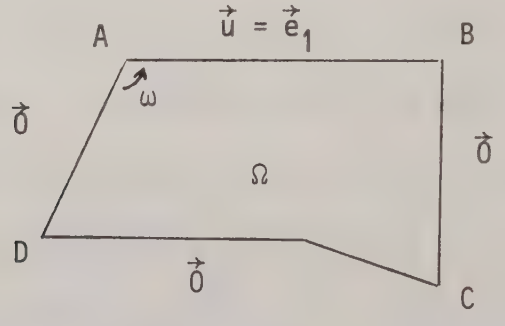
Nous considérons dans ce paragraphe un flot stationnaire dans un ouvert, réunion du demi-espace supérieur $\{x_2 > 0\}$ et d'un domaine polygonal du demi-espace inférieur, dont un côté est porté par l'axe $x_2 = 0$:



La vitesse du fluide est donnée à l'infini, parallèle à l'axe Ox_1, et on fait l'approximation suivante : la vitesse du fluide est constante ($\vec{u} = \vec{e}_1$) dans le demi-espace supérieur.

De plus, on suppose que le fluide adhère aux parois du polygone. Le système à résoudre est alors :

$$(N-S)\begin{cases} -\nu\Delta\vec{u} + (\vec{u}.\nabla)\vec{u} + \nabla p = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div}\vec{u} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \vec{u} = \vec{e}_1 & \text{sur } \overline{AB}, \\ \vec{u} = \vec{0} & \text{sur } \partial\Omega\setminus\overline{AB}. \end{cases}$$



La condition du bord, qui présente une discontinuité de première espèce, n'est pas dans l'espace $W^{1/2,2}(\Omega)$ (mais nous verrons qu'elle appartient à $W^{1-\frac{1}{p},p}(\Omega)$ pour tout $p < 2$) ; le système ne peut donc pas être résolu directement. Suivant le premier paragraphe, nous cherchons une solution de l'équation de Stokes :

$$(S)\begin{cases} -\nu\Delta\vec{u} + \nabla p = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div}\vec{u} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \vec{u} = \vec{e}_1 & \text{sur } \overline{AB}, \\ \vec{u} = \vec{0} & \text{sur } \partial\Omega\setminus\overline{AB}. \end{cases}$$

LEMME 3.1 : L'équation de Stokes ci-dessus possède une solution unique $p_o \in \bigcap_{p<2} L^p(\Omega)$, $\vec{u}_o \in \bigcap_{p<2} W^{1,p}(\Omega)$.

La démonstration du Lemme est donnée ci-après.

Ce Lemme et le théorème de trace prouvent que la condition au bord appartient à $\bigcap_{p<2} W^{1-\frac{1}{p},p}(\Omega)$. La démonstration

du théorème 1.1 montre que la résolution du problème de Stokes fournit le relèvement $(\vec{u}^*, \pi^*) = (\vec{u}_o, p_o)$. On en déduit :

THEOREME 3.2 : L'équation de Navier-Stokes (N - S) possède une solution $\vec{u} \in \bigcap_{p<2} W^{1,p}(\Omega)$, $p \in \bigcap_{p<2} L^p(\Omega)$. *De plus,* $\vec{u} - \vec{u}_o \in W^{1,2}(\Omega)$, $p - p_o \in L^2(\Omega)$.

Preuve du Lemme 3.1

Soient (r,θ) les coordonnées polaires du plan, centrées en A. On pose

$$b(\theta) = \frac{1}{\omega^2 - \sin^2\omega} \{\omega\ (\theta + \omega) \sin\theta - \theta \sin\omega \sin(\theta + \omega)\}$$

et $\Phi_A(r,\theta) = rb(\theta)$. La fonction Φ_A vérifie :

$$\begin{cases} \Delta^2 \Phi_A = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \Phi_A = 0 & \text{sur } \overline{AB} \cup \overline{AD}, \\ \dfrac{\partial \Phi_A}{\partial x_2} = 1 & \text{sur } \overline{AB}, \\ \dfrac{\partial \Phi_A}{\partial n} = 0 & \text{sur } \overline{AD}. \end{cases}$$

Définissons alors $\vec{u}^A = \vec{rot}\ \Phi_A = \left(\dfrac{\partial \Phi_A}{\partial x_2}, -\dfrac{\partial \Phi_A}{\partial x_1}\right)$ et $p_A = \dfrac{\nu}{r}(b' + b'')$. Il s'ensuit :

$$\begin{cases} -\nu\Delta\vec{u}^A + \nabla p_A = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \vec{u}^A = \vec{0} & \text{sur } \overline{AD}, \\ \vec{u}^A = \vec{e}_1 & \text{sur } \overline{AB}. \end{cases}$$

Remarquons que $|\nabla\vec{u}^A| = \dfrac{2}{r}(b + b'')$, et donc $\vec{u}^A \in \bigcap_{p<2} W^{1,p}(\Omega)$. De même $p_A \in \bigcap_{p<2} L^p(\Omega)$.

On construit de même un champ et une pression $\vec{u}^B \in \bigcap_{p<2} W^{1,p}(\Omega)$, $p_B \in \bigcap_{p<2} L^p(\Omega)$, solutions de :

$$\begin{cases} -\nu\Delta\vec{u}^B + \nabla p_B = 0 & \text{sur } \Omega, \\ \vec{u}^B = \vec{0} & \text{sur } \overline{BC}, \\ \vec{u}^B = \vec{e}_1 & \text{sur } \overline{AB}. \end{cases}$$

Soit alors ρ_A une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ vérifiant $\rho_A = 1$ dans un voisinage de A, $\rho_A \equiv 0$ en dehors d'un second voisinage de A ne rencontrant pas la partie $\overset{\frown}{B\ C\ D}$ du bord. On choisit ρ_B jouissant des mêmes propriétés à partir de B, et on pose :

$$\begin{cases} \vec{v}^A = \vec{rot}\ (\rho_A \Phi_A) \\ \vec{v}^B = \vec{rot}\ (\rho_B \Phi_B) \end{cases}$$

Il est clair que $\vec{v}^A$, $\vec{v}^B \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}\backslash A)$, si bien que $-\nu\Delta\vec{v}^A + \nabla p_A \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$. Posons alors $\vec{v} = \vec{u} - \vec{v}^A - \vec{v}^B$ et $q = p - p_A - p_B$. Le couple $(\vec{u}, \vec{p})$ est solution de (S) si et seulement si le couple $(\vec{v}, q)$ est solution de :

$$(S') \quad \begin{cases} -\nu\Delta\vec{v} + \nabla q = \vec{g} & \text{dans } \Omega, \\ \text{div } \vec{v} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \vec{v} = \vec{\phi} & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Dans ce système, les données $\vec{\phi}$ et $\vec{g}$ sont dans $\mathcal{C}^\infty(\partial\Omega)$ et $\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$. Ce système admet donc une solution $(\vec{v}, q) \in W^{1,2}(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Ce qui prouve le Lemme.

4. DEUXIEME EXEMPLE : LE PROBLEME DE TAYLOR.

On étudie l'équilibre d'un fluide dans une section cylindrique de R^3, définie en coordonnées cylindriques par $R_1 < r < R_2$, $-L < z < L$. Le cylindre extérieur et les deux

faces horizontales sont fixes, tandis que le cylindre intérieur est en rotation autour de son axe, avec une vitesse angulaire ω[1].

On veut donc résoudre l'équation de Navier-Stokes avec $\vec{f} = \vec{0}$, $\vec{\phi}(R_1, z, \theta) = \omega \vec{e}_\theta$,
$\vec{\phi}(R_2, z, \theta) = \vec{\phi}(r, \pm L, \theta) = \vec{0}$.

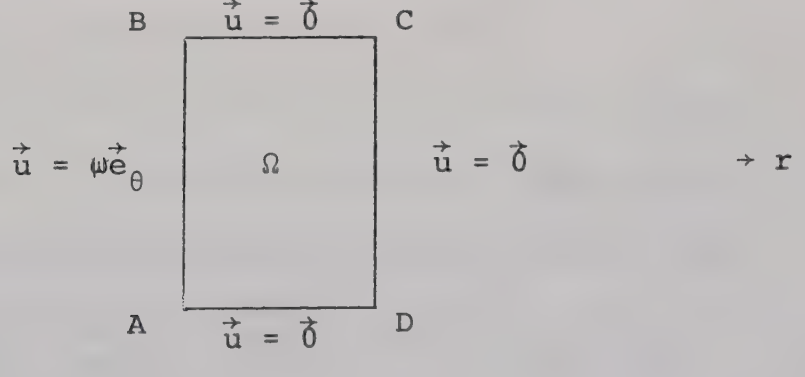
De même que dans l'exemple précédent,
$\vec{\phi} \in \bigcap_{p<2} W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$, et on obtient :

THEOREME 4.1 : Il existe une solution $(\vec{u}, p) \in \bigcap_{p<2} W^{1,p}(\Omega) \times L^p(\Omega)$ *de l'équation de Navier-Stokes suivante :*

$$\begin{cases} -\nu\Delta\vec{u} + (\vec{u}.\nabla)\vec{u} + \nabla p = 0 \\ \operatorname{div}\vec{u} = 0 \end{cases} \Bigg\} \; R_1 < r < R_2,\ -L < z < L,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\begin{cases} \vec{u}(R_1, z, \theta) = \omega \vec{e}_\theta \\ \vec{u}(R_2, z, \theta) = \vec{u}(r, \pm L, \theta) = \vec{0} \end{cases}$$

On peut mettre l'ouvert $\Omega = \{(r, z, \theta) ; R_1 < z < R_2, -L < z < L, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ sous la forme $\Omega = S^1 \times \Omega_0$:



(1) On pourrait aussi supposer que le cylindre extérieur est animé d'un mouvement de rotation uniforme de vitesse angulaire ω'.

Comme précédemment, la résolution de l'équation de Stokes linéaire fournit le relèvement $(\vec{u}^*, \pi^*)$ du Lemme 1.3. Ce relèvement est en fait sous la forme $\vec{u}^* = v(r, z)\vec{e}_\theta$, $\pi^* = 0$, où v est la solution du problème :

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} -\Delta v + \frac{1}{r^2} v - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} = 0 & \text{dans } \Omega_o \text{ ,} \\ v = \omega & \text{sur } \overline{AB} \text{ ,} \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega_o \setminus \overline{AB} \text{ .} \end{cases}$$

Soit alors $v_o \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}_o \setminus \{A,B\})$ une fonction vérifiant $v_o(r, z) = \frac{2\omega}{\pi} \operatorname{Arctg} \frac{z + L}{r - R_1}$ au voisinage de A, $v_o(r,z) = \frac{2\omega}{\pi} \operatorname{Arctg} \frac{L - z}{r - R_1}$ au voisinage de B et $v_o = 0$ au voisinage de C et D.

Posons $w = v - v_o$. Le problème $(\mathcal{P})$ équivaut à :

$$(\mathcal{P}') \quad \begin{cases} -\Delta w + \frac{1}{r^2} w - \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} = -\Delta v_o + \frac{1}{r^2} v_o - \frac{1}{r}\frac{\partial v_o}{\partial r} & \text{dans } \Omega, \\ w = w - v_o & \text{sur } \overline{AB}, \\ w = -v_o & \text{sur } \partial\Omega_o. \end{cases}$$

Il est clair que la condition au bord du problème $(\mathcal{P}')$ est de classe $\mathcal{C}^1(\partial\Omega_o)$ (elle est nulle au voisinage des sommets) D'autre part, le second membre $h = -\Delta v_o + \frac{1}{r^2} v_o - \frac{1}{r}\frac{\partial v_o}{\partial r}$ appartient à $\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega} \setminus \{A,B\})$. Au voisinage de A et B, on a :

$$h = -\Delta v_o + \frac{1}{r^2} v_o - \frac{1}{r}\frac{\partial v_o}{\partial r} = \frac{1}{r^2} v_o - \frac{1}{r}\frac{\partial v_o}{\partial r}$$

Si bien que $h \in W^{-1,\infty}(\Omega)$. La méthode variationelle fournit alors une solution $w \in W^{1,2}(\Omega)$, bien que l'ouvert Ω ne soit que lipschitzien et non $\mathcal{C}^2$. On obtient de même l'existence d'une solution variationelle à l'équation de Navier-Stokes

perturbée, grâce à la méthode de Hopf :

$$\begin{cases} -\nu\Delta\vec{z} + (\vec{u}^*.\nabla)\vec{z} + (\vec{z}.\nabla)\vec{u}^* + (\vec{z}.\nabla)\vec{z} + \nabla p = -(\vec{u}^*.\nabla)\vec{u}^* & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div}\vec{z} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \vec{z} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

La solution $(\vec{z}, p)$ ainsi obtenue est dans $W^{1,2}(\Omega) \times L^2(\Omega)$. La solution $(\vec{u}, p)$, $\vec{u} = \vec{z} + \vec{u}^*$, de l'équation de Navier-Stokes vérifie donc $\vec{u}^* \in \bigcap_{p<2} W^{1,p}(\Omega)$, $p \in L^2(\Omega)$. Ce qui prouve le théorème.

5. REMARQUES SUR LES PROBLEMES D'EVOLUTION.

Considérons l'équation de Navier-Stokes d'évolution :

$$(\varphi) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial t} - \nu\Delta u_i + \operatorname{div}(u_i\,\vec{u}) + \dfrac{\partial p}{\partial x_i} = f_i & \text{dans } \Omega \times (0,T), \\ \operatorname{div}\vec{u} = 0 & \text{dans } \Omega \times (0,T), \\ \vec{u} = \vec{\phi} & \text{sur } \partial\Omega \times (0,T), \\ \vec{u}\,\big|_{t=0} = \vec{\alpha} & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

THEOREME 5.1 : *Soit* $\frac{n}{2} < p \leq 2$, *et supposons que :*

i) $\vec{f} \in W^{1,\infty}(0,T ; W^{-1,p}(\Omega))$, $\vec{\phi} \in W^{1,\infty}(0,T ; W^{1-\frac{1}{p},p}(\Omega))$,

ii) $\vec{a} \in \mathbb{L}^2(\Omega)$, $\operatorname{div}\vec{a} = 0$,

iii) $\vec{a}.\vec{n} = \vec{\phi}\,\big|_{t=0}.\vec{n}$ sur $\partial\Omega$,

iv) $\int \vec{\phi}.\vec{n}\, d\sigma = 0$ pour tout $t \in (0,T)$.

Alors, il existe une solution faible de l'équation de Navier-Stokes (φ) vérifiant :

v) $\vec{u} \in L^\infty(0,T ; \mathbf{L}^2(\Omega)) \cap L^2(0,T ; \mathbf{W}^{1,p}(\Omega))$,

vi) $\frac{d\vec{u}}{dt} \in L^\alpha(0,T ; W^{-1,p}(\Omega))$, $\alpha = \begin{cases} 2 \text{ si } n = 2 \\ 4/3 \text{ si } n = 3, \end{cases}$

vii) $p \in L^2(0, T ; L^p(\Omega))$.

Démonstration : On utilise la preuve du Lemme 1.3, et on remarque que l'application (non-linéaire sauf si j = 0) :

$$\mathbf{W}^{1,p}(\Omega) \times \mathbf{W}^{1-\frac{1}{p},p}(\Omega) \longrightarrow \mathbf{W}^{1,p}(\Omega) \times L^p(\Omega)$$

$$(\vec{f}, \vec{\phi}) \longmapsto (\vec{u}^j, p^j)$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$. On choisit $j = \left[\frac{n(2-p)}{4p-2n} \right]$, et on pose $\vec{u}^* = \vec{u}^j$, $\pi^* = p^j$. D'après i) on a donc :

$$\begin{cases} \vec{u}^* \in W^{1,\infty}(0,T ; \mathbf{W}^{1,p}(\Omega)) \ , \ \pi^* \in W^{1,\infty}(0,T ; L^p(\Omega)), \\ \vec{g} = \vec{f} + \nu\Delta\vec{u}^* - (u^*.\nabla)u^* - \nabla\pi^* \in W^{1,\infty}(0,T ; \mathbf{W}^{-1,2}(\Omega)). \end{cases}$$

On en déduit $\vec{g} - \frac{\partial\vec{u}^*}{\partial t} \in L^\infty(0,T ; \mathbf{W}^{-1,2}(\Omega))$ car d'après le Théorème de Sobolev $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{W}^{-1,2}(\Omega)$.

Posons $\vec{v} = \vec{u} - \vec{u}^*$, $q = p - \pi^*$, de sorte que le problème (φ) équivaut au système suivant :

$$(\varphi') \quad \begin{cases} \dfrac{\partial v_i}{\partial t} - \nu\Delta v_i + \operatorname{div}(v_i \vec{v} + v_i \vec{u}^* + u_i^* \vec{v}) + \dfrac{\partial q}{\partial x_i} \\ \qquad = g_i - \dfrac{\partial u_i^*}{\partial t} \qquad \text{dans } \Omega \times (0,T) \qquad (5.1) \\ \operatorname{div} \vec{v} = 0 \qquad \text{dans } \Omega \times (0,T) \qquad (5.2) \\ \vec{v} = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega \times (0,T) \qquad (5.3) \\ \vec{v}\,|_{t=0} = \vec{a}^* = \vec{a} - \vec{u}^*\,|_{t=0} \qquad (5.4) \end{cases}$$

La condition initiale vérifie $\vec{a}^* \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, div $\vec{a}^* = 0$, $\vec{a}^*.\vec{n} = 0$ sur $\partial\Omega$. De sorte que la multiplication de (5.1) par v donne formellement :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v|_2^2 + \nu||\vec{v}||^2 + \int_\Omega (v.\nabla)\vec{u}^* \cdot \vec{v}\, dx$$

$$= \langle \vec{g} - \frac{d}{dt}\vec{u}^*, \vec{v} \rangle \leq c_1||v|| \qquad (5.5)$$

Cependant, avec $\frac{2}{q} = 1 - \frac{1}{p}$:

$$\left|\int_\Omega (\vec{v}.\nabla)\vec{u}^*.\vec{v}\, dx\right| \leq c_2||\vec{u}^*||_p|\vec{v}|_q^2 \leq c_3||\vec{u}^*||_p |\vec{v}|_2^{2-\frac{n}{p}}||v||^{\frac{n}{p}}$$

$$\leq \frac{\nu}{3}||\vec{v}||^2 + c_4||\vec{u}^*||^{\frac{2p}{2p-n}}|v|_2^2 .$$

Si bien que de (5.5) on déduit une estimation "a priori" de $\vec{v}$ dans $L^\infty(0,T ; \mathbf{L}^2(\Omega)) \cap L^2(0,T ; \mathbf{W}^{1,2}(\Omega))$. L'existence d'une solution de ($\mathcal{Q}'$) est alors classique, par exemple en utilisant la méthode de Galerkin (Temam [4]). Cette solution vérifie

$$\begin{cases} \vec{v} \in L^\infty(0,T ; \mathbf{L}^2(\Omega)) \cap L^2(0,T ; \mathbf{W}^{1,2}(\Omega)), \\ q \in L^2(0,T ; \mathbf{L}^2(\Omega)). \end{cases}$$

Il est clair que $\vec{u} = \vec{v} + \vec{u}^*$, $p = q + \pi^*$ vérifient v) et vii). Enfin le système ($\mathcal{Q}$) montre que $\frac{d\vec{u}}{dt}$ vérifie vi).

Cas $4n/(n + 4) < p \leq 2$.

Ce cas s'applique aux exemples des § 3 et 4, puisque dans ces deux cas, $p = 2 - \varepsilon$ est arbitrairement proche de 2.

On peut alors réduire les hypothèses de la manière suivante :

i') $\vec{f} \in W^{1,2}(0,T ; W^{-1,p}(\Omega))$, $\vec{\phi} \in W^{1,2}(0,T ; W^{1-\frac{1}{p},p}(\Omega))$.

THEOREME 5.2 : *Si* $\frac{4n}{n+4} < p \leq 2$, *et si* $\vec{f}$, $\vec{\phi}$, $\vec{a}$ *vérifient* i'), ii), iii), iv), *alors l'équation de Navier-Stokes* ($\mathcal{Q}$) *admet une solution faible* $(\vec{u}, p)$ *vérifiant* v), vi), vii).

Démonstration : Reprenons la preuve du Théorème 5.1. Puisque $\frac{4n}{n+4} < p$, on peut choisir $j = 0$. L'application $(\vec{f}, \vec{\phi}) \to (\vec{u}^\circ, \pi^\circ)$ étant linéaire, on a (remarquons que $W^{1,2}(0,T)$ est un espace de fonctions continues sur $(0,T)$) :

$$\vec{g} - \frac{\partial u^*}{\partial t} \in L^2(0,T ; W^{-1,2}(\Omega)).$$

L'existence d'une solution $(\vec{v}, q)$ du problème ($\mathcal{Q}'$) se déduit donc de la manière habituelle.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] J. Leray : Etude de diverses équations intégrales non-linéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique. J. Math. Pures et Appl. 12 (1933) pp 1-82.

[2] E. Hofp : Uber die Aufangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundleichungen. Math. Nachr. 4 (1951) pp 213-231.

[3] L. Cattabriga : Su un problema al contorno relativo al sistema di equzioni di Stokes. Rend. Mat. Sem. Univ. Padova. 31 (1961) pp 308-340.

[4] R. Temam : Navier-Stokes equations. (1979) North-Holland.

C.N.R.S. et Université Paris-Sud
Bâtiment 425
91405 ORSAY Cédex, France.

Numéro d'impression : 539
2e trimestre 1982.